Memento matematică

Jurcone Ramiro

Prefaţă

Prezenta lucrare are ca scop sintetizarea principalelor noţiuni de matematică din programa de liceu.

Motivul realizării lucrării este necesitatea existenţei într-o singura carte a formulelor de matematică, metodelor de rezolvare şi a exerciţiilor tip, pentru a caror găsire este necesară altfel consultatea tutoror manualelor de liceu şi a multor culegeri.

Lucrarea se doreşte a fi o prezentare succintă şi la obiect a principalelor noţiuni, neavând pretenţia de a înlocui munca din culegeri specializate, din manual sau din culegeri de probleme cu subiecte de examen. Mai degrabă se doreşte a fi o introducere în studiul matematicii de liceu pe de o parte şi un manual de referinţă pentru consultarea operativa a principalelor formule şi metode de rezolvare.

Lucrarea este formată din două părţi:

Partea I Conţine prezentarea teoretică a principalelor subiecte, câte un subiect pe o filă, adică pe două pagini fată/verso. Subiectele sunt notate după sistemul Memo 1, Memo 2,... s.a.m.d.

Partea II Conţine fişe de exerciţii, în principiu fiecare fişa de exerciţii se poate studia independent, o fişa putând constitui in principiu obiectul unei lecţii. În funcţie de durata lecţiei şi de ritmul de lucru, este posibil studiul mai multor fişe într-o lectie. Fişele sunt notate dupa sistemul Fişa 1, Fişa 2, ... s.a.m.d. Fişele sunt câte o fişa pe o filă, adică pe două pagini fată/verso. Pentru efectuarea exerciţiilor prezente in fişele din partea a II-a, uneori este recomandabil să fie studiate capitolele corespunzătoare din partea I de teorie.

În vederea susţinerii diverselor examene, se recomandă ca după parcurgerea prezentei lucrări, să se efectueze pregătire după o culegere de subiecte pentru tipul respectiv de examen, în vederea accentuării deprinderilor specifice acelui examen. Ca exemplu în acest sens, pot fi utile subiectele de examen din anii anteriori, respectiv culegeri editate în vederea susţinerii examenului din anul respectiv.

Cuprins

Partea I = Teorie

Cuprins

Partea a II-a = Exerciţii

PARTEA I

MEMENTO MATEMATICĂ

- TEORIE -

Memo 1: Geometrie plana

Termeni utilizati:

- dreapta, semidreapta, segment, mediatoarea unui segment.
- drepte paralele, dreapta secantă, unghiuri alterne interne, unghiuri alterne externe, unghiuri corespondente
- bisectoarea unui unghi
- simetric: simetricul unui punct faţă de o dreaptă, simetrica unei drepte faţă de o dreaptă.
- unghiuri: ascuţite, obtuze, complementare, suplementare
- triunghiul : triunghiul oarecare, isoscel, echilateral, dreptunghic, triunghiuri egale (cazurile de egalitate),
- triunghiul : triunghiuri asemenea(cazurile de asemănare), teorema lui Thales.
- triunghiul : suma unghiurilor într-un triunghi, unghi exterior unui triunghi(ce este şi cum se calculează),
- triunghiul : linia mijlocie(ce este şi cum se calculează)
- triunghiul : Linii importante în triunghi:

• Bisectoarea: Împarte un unghi in două părţi egale. Orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului. Bisectoarele triunghiului se intersectează în centrul cercului înscris triunghiului.

• Mediana: Uneşte vârful unui triunghi cu mijlocul laturii opuse. Medianele triunghiului se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului. G se află la două treimi de vârf şi la o treime de bază.

• Mediatoarea: Este perpendiculară pe mijlocul unui segment. Orice punct de pe mediatoare este egal depărtat de capetele segmentului. Mediatoarele triunghiului se intersectează în centrul cercului circumscris triunghiului.

• Înaltimea : Este perpendiculara dusă dintr-un vărf al triunghiului pe latura opusă. Înălţimile triunghiului se intersectează în ortocentrul triunghiului ("Orto" înseamnă drept în greacă)

Suprafaţa unui triunghi oarecare:

(1) S= $\frac{baza*\hat{\imath}naltimea}{2}$

(2) S= $\frac{b*c*sin(A)}{2}$

(3) S= $\frac{a*b*c}{4*R}$, unde R= raza cerc circumscris triunghiului (intersecţie mediatoare)

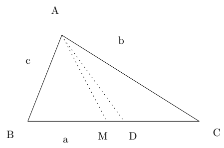
(4) $S = r * p$, unde r= raza cerc înscris triunghiului (intersecţie bisectoare), p= semiperimetrul=$\frac{a+b+c}{2}$

(5) S= $\sqrt{p * (p-a) * (p-b) * (p-c)}$, unde p=semiperimetrul . (Formula lui Heron)

(6) Idee utilă: Exprimarea suprafeţei în două moduri, în probleme şi aflarea necunoscutei

Teoreme în triunghiul oarecare

Fie triunghiul oarecare ABC, AD= mediană, AM= bisectoare



•Teorema sinusului: $\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)} = 2 * R$, unde R=raza cercului circumscris triunghiului •Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(A)$ (Teorema lui Pitagora generalizată)

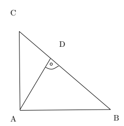
Menţiuni:- Pt. A=ascuţit, cos(A) > 0, deci $-2*b*c*cos(A)$ este o cantitate negativă

- Pt. A=obtuz, cos(A) < 0, deci $-2*b*c*cos(A)$ este o cantitate pozitivă

•Teorema medianei: $AD^2 = \frac{2*(AB^2+AC^2)-BC^2}{4}$

•Teorema bisectoarei: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$

Triunghiul dreptunghic Fie triunghiul dreptunghic ABC, A= 90° , AD ⊥ BC



• Formulele pentru sin, cos, tg, ctg

• Valorile sin, cos, tg, ctg pentru 30, 60, 45 grade

• B=90-C, deci sin(B)=cos(C), cos(B)=sin(C), tg(B)=ctg(C), ctg(B)=tg(C), samd.

• Teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

• Teorema înalţimii: $AD^2 = DB * DC$

• Teorema catetei: $AB^2 = BC * DB$, respectiv $AC^2 = BC * DC$

• Cateta ce se opune la 30 grade= jumatate din ipotenuză

• S= $\frac{cateta*cateta}{2}$

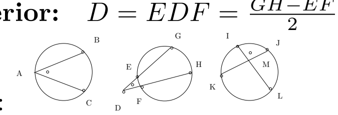
Poligoane care se pot descompune in triunghiuri

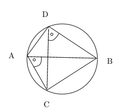
• Pătrat, dreptunghi, paralelogram, trapez, romb. Perimetre, suprafeţe, proprietăţi.

Cercul

• Diametrul=$2 * R$. Perimetrul P=$2 * \pi * R$. Suprafaţa S=$\pi * R^2$.

• Unghi **a) pe cerc**: $\hat{A} = \widehat{CAB} = \frac{BC}{2}$ **b)exterior:** $\hat{D} = \widehat{EDF} = \frac{GH-EF}{2}$ **c)interior:** $\hat{M} = \widehat{KML} = \frac{IJ+KL}{2}$ conform figurii:





Patrulaterul inscriptibil Fie patrulaterul inscriptibil ABCD:

• Suma unghiurilor opuse este 180 grade, adica $\hat{A} + \hat{B} = 180$, respectiv $\hat{C} + \hat{D} = 180$.

• Unghiul format de o diagonală cu una din laturi, este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, adică de exemplu $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$.

Memo 2: Formule de trigonometrie:

$$sin(x) = \frac{cateta \quad opusă}{ipotenuză}$$

$$cos(x) = \frac{cateta \quad alaturată}{ipotenuză}$$

$$tg(x) = \frac{cateta \quad opusă}{cateta \quad alaturată}$$

$$ctg(x) = \frac{cateta \quad alaturată}{cateta \quad opusă}$$

$$tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$tg(x) = \frac{1}{ctg(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)}$$

$$sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x) \qquad cos(x) = sin(\frac{\pi}{2} - x) \qquad tg(x) = ctg(\frac{\pi}{2} - x) \qquad ctg(x) = tg(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$Formula\ fundamentală\ a\ trigonometriei:$$

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Utile: $cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}$ $\qquad$ $sin^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}$

Dacă notăm $tg\frac{x}{2} = t$, atunci sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) se pot exprima în funcţie de $tg\frac{x}{2}$ astfel:

$sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad$ $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad$ $ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} = \frac{1-t^2}{2t}$

$$sin(a + b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b)$$

$$sin(a - b) = sin(a) * cos(b) - cos(a) * sin(b)$$

$$cos(a + b) = cos(a) * cos(b) - sin(a) * sin(b)$$

$$cos(a - b) = cos(a) * cos(b) + sin(a) * sin(b)$$

$$sin(2a) = 2 * sin(a) * cos(a)$$

$$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$$

$$cos(2a) = 2 * cos^2(a) - 1$$

$$cos(2a) = 1 - 2 * sin^2 a$$

$$sin(3a) = sin(a + 2a) = s.a.m.d.$$

$$cos(3a) = cos(a + 2a) = s.a.m.d.$$

$$sin(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{2}}$$

$$cos(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{2}}$$

$$tg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1-cos(a)}{1+cos(a)}}$$

$$ctg(\frac{a}{2}) = +- \sqrt{\frac{1+cos(a)}{1-cos(a)}}$$

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)*tg(b)}$$

$$tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)*tg(b)}$$

$$ctg(a+b) = \frac{ctg(a)*ctg(b)-1}{ctg(a)+ctg(b)}$$

$$ctg(a-b) = \frac{1+ctg(a)*ctg(b)}{ctg(b)-ctg(a)}$$

$$tg(a+b+c) = tg([a+b]+c) = \frac{tg[a+b]+tg(c)}{1-tg[a+b]*tg(c)} = s.a.m.d.$$

$$ctg(a+b+c) = ctg([a+b]+c) = \frac{ctg[a+b]*ctg(c)-1}{ctg[a+b]+ctg(c)} = s.a.m.d.$$

$$sin(a)*cos(b) = \frac{sin(a+b)+sin(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*cos(b) = \frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}$$

$$cos(a)*sin(b) = \frac{sin(a+b)-sin(a-b)}{2}$$

$$sin(a)*sin(b) = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$$

$$sin(a)+sin(b) = 2*sin(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$sin(a)-sin(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)+cos(b) = 2*cos(\frac{a+b}{2})*cos(\frac{a-b}{2})$$

$$cos(a)-cos(b) = -2*sin(\frac{a+b}{2})*sin(\frac{a-b}{2})$$

Cercul trigonometric

Scrieţi sin(x),cos(x),tg(x),ctg(x) pentru x=$30°, 45°, 60°$ si respectiv $0°, 90°, 180°, 260°, (360)°$

Memo 3: Cercul trigonometric

Definitie:

Cercul trigonometric este un cerc cu raza R egala cu 1 (egala cu unitatea)

Consecinta 1: Exprimare unghiuri in radieni

- Lungime cerc= 2π R = 2π*1= 2π
- Lungime cerc = parcurgerea intregului cerc, adica 360 grade
- Deci Lungime cerc = 2π = 360
- Prin urmare: 360 grade = 2π 180 grade = π 90 grade = $\frac{\pi}{2}$ 270 grade = $\frac{2\pi}{3}$
- se ajunge astfel la notiunea de **radiani**, calculabil prin regula de 3 simpla.

De exemplu ne intereseaza cati radieni inseamna 45 grade.

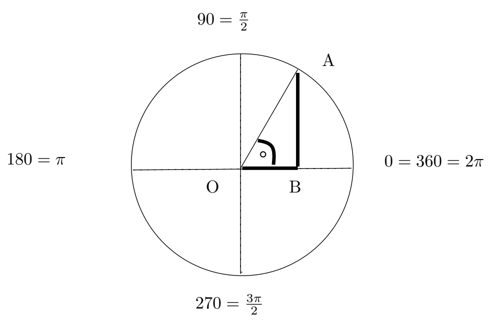
Se porneste de la : 180 grade .... π 45 grade(exemplu)....... x

Se scoate x

Consecinta 2: Aflare sin, cos, tg, ctg pentru 0, 90, 180, 270, 360 grade Fie cercul trigonometric de mai jos, deci raza R=1.

sin(x)=$\frac{AB}{OA}$= $\frac{AB}{R=1}$ = AB, deci segmentul **AB inseamna sin(x)**

cos(x)=$\frac{OB}{OA}$= $\frac{OB}{R=1}$ =OB, deci segmentul **OB inseamna cos(x)**



1)Pentru x=0 grade, AB devine 0 iar OB devine 1(egal cu raza R=1),

deci sin(0)=0, cos(0)=1, tg(0) = $\frac{0}{1}$=0, ctg(0)=$\frac{1}{0}$ =∞

2)Pentru x=90 grade, AB devine 1(egal cu R=1) iar OB devine 0,

deci sin(90)=1, cos(90)=0, tg(90) = $\frac{1}{0}$=∞, ctg(90)=$\frac{0}{1}$ =0

3)Pentru x=180 grade, AB devine 0 iar OB devine -1(egal cu raza R=1 in sens negativ),

deci sin(180)=0, cos(180)=-1, tg(180) = $\frac{0}{-1}$=0, ctg(180)=$\frac{-1}{0}$ =-∞

4)Pentru x=270 grade, AB devine -1(egala cu R=1 in sens negativ) iar OB devine 0,

deci sin(270)=-1, cos(270)=0, tg(270) = $\frac{-1}{0}$=-∞, ctg(270)=$\frac{0}{-1}$ =0

Consecinta 3: Valorile sin, cos, tg, ctg pentru unghiri mai mari de 360 grade

Se considera stiute din gimnaziu sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) pentru x=30, 60, 45 grade:

Pentru x=30 sin(x)=$\frac{1}{2}$ cos(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ rezulta tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ si ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$

Pentru x=60, deoarece 60=90-30, sin(60)=cos(30), cos(60)=sin(30), tg(60)=ctg(30), ctg(60)= tg(30), adica pentru x=60, sin(x)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(x)=$\frac{1}{2}$ rezulta tg=$\frac{sin(x)}{cos(x)}$ si ctg=$\frac{cos(x)}{sin(x)}$

Pentru x=45, deoarece triunghic dreptunghic este isoscel (catetele egale), tg(x)=$\frac{cateta\ opusa}{cateta\ alaturata}$=1, ctg(x)=$\frac{1}{tg(x)}$=1, catetele fiind egale si ipotenuza fiind aceeasi, sin(x)=cos(x) si anume egale cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$

adica pentru x=45, sin(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, tg(x)=1 si ctg(x)=1

Exemplul 1: Se cere sin(750)

Deoarece 360 grade inseamna **o rotatie completa,** , 750 grade inseamna 720(=360+360= doua rotatii si ajung tot la 0 grade)+30.

Prin urmare sin(720) inseamna ca punctul A este in aceeasi pozitie ca pentru 30 grade.

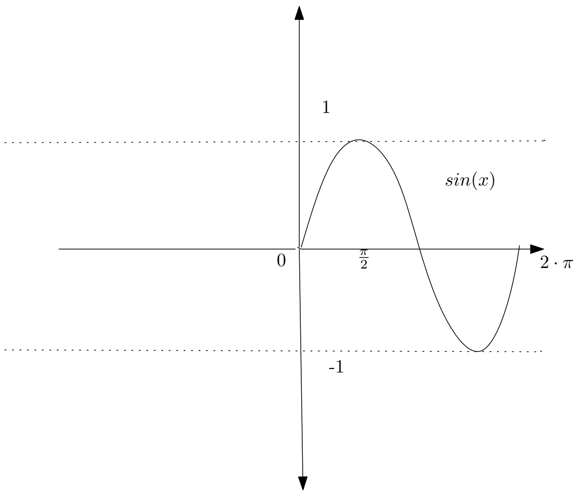
Adica sin(720)=sin(30)=$\frac{1}{2}$.

Identic si pentru cos(x), tg(x) , ctg(x), adica cos(750)=cos(30), tg(750)=tg(30), ctg(750)=ctg(30).

Exemplul 2: Se cere sin($\frac{13\pi}{4}$) Prima data se transforma $\frac{13\pi}{4}$ in grade pentru a judeca mai usor si obtinem 1125 grade, adica 1125=3* 360+45, adica avem 3 rotatii complete si apoi inca 45 grade. Deci sin($\frac{13\pi}{4}$)= sin(45)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Memo 4 Graficele functiilor trigonometrice

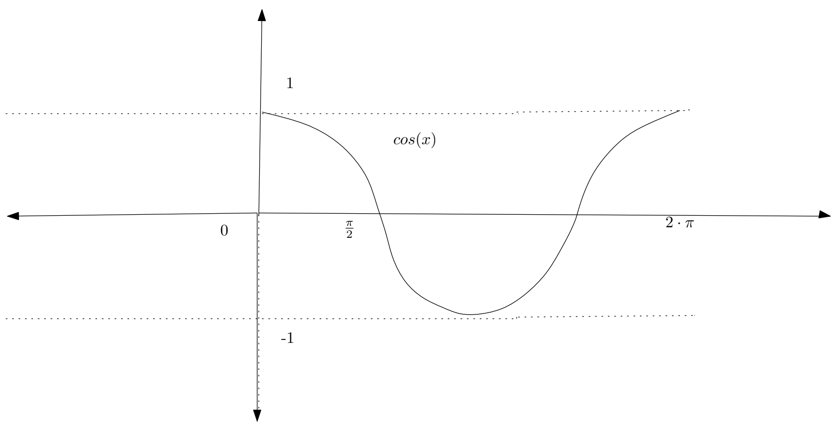
$$\mathbf{sin(x)} : \mathbf{R} \rightarrow [-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]$$



Functia sin(x) are perioada $2 \cdot \pi$, este impara, este definita de R, ia valori intre -1 si +1 si este bijectiva pentru x $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Deci restrictia bijectiva sin(x) : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$ admite o functie inversa, arcsin(x) : $[-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, al carei grafic este simetric in raport cu sin(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

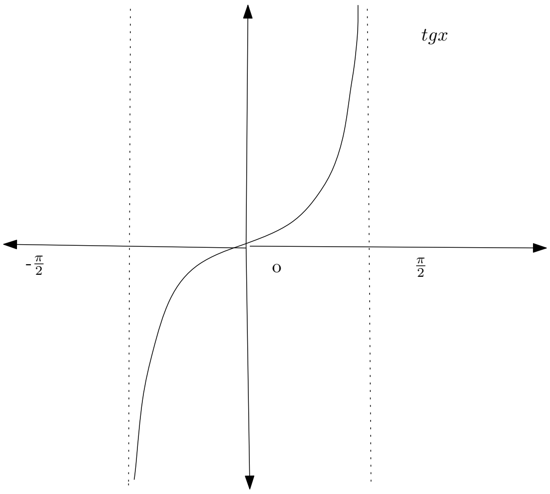
$$\mathbf{cos(x)} : \mathbf{R} \rightarrow [-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]$$



Functia cos(x) are perioada $2 \cdot \pi$, este para, este definita pe R, ia valori intre -1 si +1 si este bijectiva pentru x $\in [0, \pi]$.

Deci restrictia bijectiva cos(x) : $[0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$ admite o functie inversa, arccos(x) : $[-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, al carei grafic este simetric in raport cu cos(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

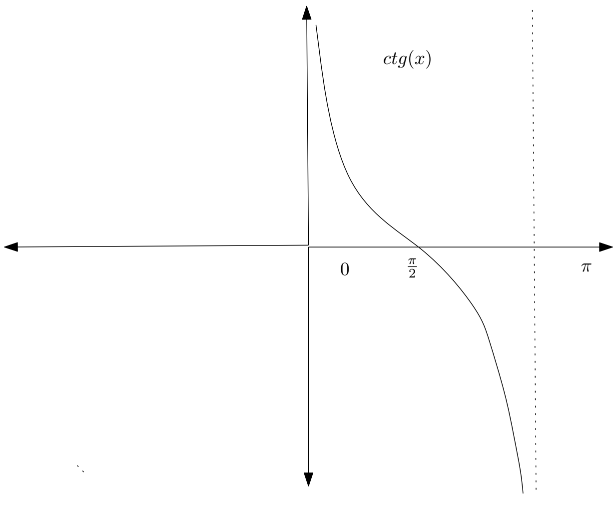
tg(x) : R $\setminus$ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ } $\rightarrow$ **R**



Functia tg(x) are perioada π, este impara, este definita pe R $\setminus$ { $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ }, ia valori intre -∞ si +∞ si este bijectiva pentru x $\in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Deci restrictia bijectiva tg(x) : $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ admite o functie inversa, arctg(x) : $(-\infty, +\infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, al carei grafic este simetric in raport cu tg(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

ctg(x) : R $\setminus$ { $\pi + k \cdot \pi$ } $\rightarrow$ **R**



Functia ctg(x) are perioada π, este impara, este definita pe R $\setminus$ { $\pi + k \cdot \pi$ }, ia valori intre -∞ si +∞ si este bijectiva pentru x $\in (0, \pi)$.

Deci restrictia bijectiva ctg(x) : $(0, \pi) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ admite o functie inversa, arctg(x) : $(-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$, al carei grafic este simetric in raport cu ctg(x) fata de bisectoarea intai, y=x.

Memo 5 Ecuatii si inecuatii trigonometrice

1. Ecuatii trigonometrice elementare

Se considera cunoscute urmatoarele:

- Se considera cunoscute valorile pentru sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x), unde x=30°, 45°, 60° si pentru 90°, 180°, 270°, precum si modul de transformare din grade in radiani.
- Se considera cunoscut cercul trigonometric
- Se considera cunoscute graficele functiilor sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x)
- Se considera cunoscut faptul ca sin(x), tg(x), ctg(x) sunt impare iar cos(x) este par. De asemenea se cunoaste faptul ca functiile pare sunt simetrice fata de Oy, iar functiile impare sunt simetrice fata de origine
- Se considera cunoscut faptul ca sin(x) si cos(x) au perioada $2 \cdot \pi$ iar tg(x) si ctg(x) au perioada π

Se considera **ecuatie trigonometrica elementara**, o ecuatie care are una din formele urmatoare:

sin(x)=a , unde a $\in$ [-1,1]
cos(x)=b , unde b $\in$ [-1,1]
tg(x) =c , unde c $\in$ R
ctg(x)=d , unde d $\in$ R

Capcana consta in faptul ca rezolvarea acestor ecuatii pare foarte simpla, dar de fapt este complicata. De exemplu pentru sin(x)=1/2, prima tentatie este sa se dea rapid raspunsul x= 30°. Raspunsul este corect dar incomplet, in sensul ca mai exista o infinitate de solutii si anume: 30°, 150° (= 180-30) si pentru fiecare dintre ele, $+2\pi k$, unde k $\in$ Z si anume pentru k>0 inseamna rotatii in sens trigonometric iar pentru k<0 inseamna rotatii in sens invers trigonometric. Scriind rezultatul in radiani, solutia completa pentru ecuatia sin(x)=1/2 este x$\in\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$ U $\{ \frac{5\cdot\pi}{6} + 2k\pi\}$

Pentru a se evita efectuarea de fiecare data a rationamentelor anterioare, este eficienta memorarea urmatoarelor formule:

sin(x)=a	x=$(-1)^k\cdot$ arcsin(a) + kπ, pentru a $\in$ [0,1]
sin(x)=a	x=$(-1)^{k+1}\cdot$ arcsin$\|a\|$+kπ, pentru a $\in$ [-1,0)
cos(x)=b	x=$\pm$ arccos(b)+2kπ, pentru b $\in$ [0,1]
cos(x)=b	x=$\pm$ arccos$\|b\|$+(2k+1)π, pentru b $\in$ [-1,0]
tg(x)=c	x=arctg(c)+kπ
ctg(x)=d	x=arcctg(d)+kπ

Formulele pentru tg(x)=c si ctg(x)=d sunt usor de retinut.
Pentru sin(x)=a si cos(x)=b formulele sunt mai dificil de memorat, eventual se poate retine modul de deducere a acestora, utilizand cercul trigonometric.

2. Ecuatii de genul sin(x)=sin(y)

Pentru urmatoarele tipuri:

sin(x)=sin(y)
cos(x)=cos(y)
sin(x)=cos(y)
tg(x) = tg(y)
ctg(x)=ctg(y)

Pentru a se ajunge la ecuatii trigonometrice elementare, se recomanda transformarea ecuatiei initiale, de exemplu:

Pentru sin(x) = sin(y) trecem totul intr-un membru, sin(x)-sin(y)=0 , transformam in produs si obtinem $2cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2} = 0$, adica $cos\frac{x+y}{2} = 0$ si $sin\frac{x-y}{2} = 0$ adica am obtinut un sistem de doua ecuatii trigonometrice elementare pe care il rezolvam.

Pentru sin(x)=cos(y), se scrie sin(x)=sin($\frac{\pi}{2}$-y) si in continuare se procedeaza similar cu problema anterioara.

3. Inecuatii trigonometrice elementare

Se considera **inecuatie trigonometrica elementara**, o inecuatie care are una din formele urmatoare:

sin(x) > a
cos(x) > b
tg(x) > c
ctg(x) > d

Semnul poate fi > , < , >= ,<= , s.a.m.d.

Pentru a se evita memorarea altor formule, se recomanda rezolvarea acestor inecuatii astfel:

• Pentru $sin(x) > a$ si $cos(x) > b$ se analizeaza **cercul trigonometric** , tinand cont de rotatiile $2 \cdot k \cdot \pi$, unde k ∈ Z.
• Pentru $tg(x) > c$ si $ctg(x) > d$ se analizeaza **graficul functiei tg(x), respectiv ctg(x)**, tinand cont ca tg(x) si ctg(x) au perioada π

4. Rezolvarea EFECTIVA a ecuatiilor trigonometrice (respectiv a inecuatiilor trigonometrice)

In principiu se parcurg urmatorii pasi:

1. Se transforma ecuatia, respectiv inecuatia data pana se ajunge la o **ecuatie elementara**, respectiv inecuatie elementara. Transformarea se face folosind diverse artificii si formulele uzuale de trigonometrie. Dintre aceste formule, sunt utile indeosebi: formula fundamentala a trigonometriei, exprimarea sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x) in functie de $tg\frac{x}{2}$, exprimarea lui sin(x) si cos(x) in functie de tg(x), formulele unghiurilor pe jumatate, in care avem radicali, in cazul in care in enunt exista functii la patrat si dorim sa scapam de patrate, s.a.m.d. Este recomandabila stapanirea formulelor de trigonometrie.

2. Se rezolva **ecuatia elementara**, respectiv inecuatia elementara, conform metodelor prezentate anterior.

Memo 6 Numere complexe

A. Forma algebrica a numerelor complexe

Totul incepe de la numarul $i = \sqrt{-1}$

• **Calcule** cu **i**:

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = +1$
Se observa ca i^4=1, deci i la orice putere multiplu de 4 este egal cu 1. Aceasta observatie este utila pentru calculul expresiilor care contin i^n.

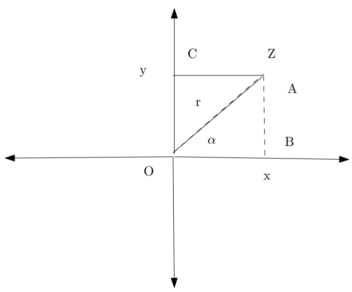
De exemplu $i^{30} = i^{28} \cdot i^2 = (i^4)^7 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

• **Termeni noi** Fie un numar complex z=x+yi (forma algebrica).
-**x** se numeste *partea reala* a numarului complex iar **y** se numeste *partea imaginara* a numarului complex.
-**conjugatul lui z** se noteaza cu $\bar{z}$ si se defineste ca fiind $\bar{z}$=x-yi

---

B. Forma trigonometrica a numerelor complexe

Fie un numar complez z=x+yi (forma algebrica).
Fie reprezentarea grafica urmatoare:



Se poate scrie :
$sin(\alpha) = \frac{y}{r}$ deci y=r·$sin(\alpha)$, respectiv

$cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ deci x=r·$cos(\alpha)$

z=x+yi= r·$cos(\alpha)$+r·$sin(\alpha)$·i= $r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$

• Forma z=x+yi se numeste *forma algebrica a numarului complex.* **x** se numeste *partea reala* a numarului complex iar **y** se numeste *partea imaginara* a numarului complex.

• Forma z=$r[cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)]$ se numeste *forma trigonometrica a numarului complex.* **r** se numeste *modulul* numarului complex iar α se numeste *argumentul* numarului complex.

C. Scrierea unui numar complex sub forma trigonometrica

Se da un numar complex z=x+yi . Scrieti numarul sub forma trigonometrica, adica z=r(cosα +i sinα)

1. Se stabileste cadranul, in functie de semnele lui x si y
2. Se calculeaza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. Se calculeaza $tg\alpha^* = \left|\frac{y}{x}\right|$ rezulta α^*= arctg$\left|\frac{y}{x}\right|$, intotdeauna α^* fiind un unghi din cadranul intai, deoarece $\frac{y}{x}$ se ia in modul.
4. Se calculeaza α pe baza lui α^* si pe baza cadranului stabilit la punctul 1, astfel:

Pt. cadranul 1, se ia $\alpha = \alpha^*$
Pt. cadranul 2, se ia $\alpha = \pi - \alpha^*$
Pt. cadranul 3, se ia $\alpha = \pi + \alpha^*$
Pt. cadranul 4, se ia $\alpha = 2\pi - \alpha^*$

5. Se scrie numarul complex sub forma trigonometrica,
adica z=r(cosα +i sinα)

D. Formule utile pt. numere complexe scrise trigonometric

Fie $z_1=r_1(\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)$, $z_2=r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, $z=r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

(1) *Inmultire:* $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

(2) *Impartire:* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

Deoarece $z^n = z \cdot z \cdot z .... \cdot z = r \cdot r \cdot ...r[cos(\alpha + \alpha + \cdot\cdot + \alpha) + i \cdot sin(\alpha + \alpha \cdot\cdot + \alpha)]$

obtinem:

(3) *Putere:* $z^n = r^n[cos(n \cdot \alpha) + i \cdot cos(n \cdot \alpha)]$

(4) *Radical:* $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot (cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n})$

Memo 7: Formule de algebra:

Formule pentru $(a \underline{+} b)^n$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2*a*b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2*a*b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3*a^2*b + 3*a*b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3*a^2*b + 3*a*b^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = (a-b)^3*(a-b) \qquad s.a.m.d.$$

Formule pentru $a^n \underline{+} b^n$

$$a^2 - b^2 = (a-b)*(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)*(a^2 + a*b + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)*(a^2 - a*b + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)*(a^{n-1} + a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 + ... + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)*(a^{n-1} - a^{n-2}*b^1 + a^{n-3}*b^2 - .... + b^{n-1})$$

Sume

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$ $\quad$ S_1 se mai noteaza cu $\sum\limits_{k=1}^{n} k$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$ $\quad$ S_2 se mai noteaza cu $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = S_1^2 = (\frac{n*(n+1)}{2})^2$ $\quad$ S_3 se mai noteaza cu $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Exemplu: Calculati suma $S = 1*2 + 2*3 + ... + n*(n+1)$

Rezolvare: S$=\sum\limits_{k=1}^{n} k*(k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} = S_2 + S_1 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} + \frac{n*(n+1)}{2}$

Puteri si radicali

$$(a*b)^m = a^m * b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Formula radicalilor compusi:
$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = +\sqrt{A^2 - B}$.
Exemplu: Calculati expresia E=$\sqrt{6 - \sqrt{11}}$.
Rezolvare: Calculez C=$\sqrt{6^2 - 11} = \sqrt{25} = 5$, deci E=$\sqrt{\frac{6+5}{2}} - \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

Memo 8: Ecuatia de grad 2. Functia de grad 2

Ecuatia de gradul doi

$$a * x^2 + b * x + c = 0, \quad unde \quad a \neq 0$$

• Radacinile $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2*a}$ unde $\Delta = \sqrt{b^2 - 4 * a * c}$

• Pentru $\Delta > 0$ exista doua radacini reale, x_1 *si* x_2 , cu $x_1 \neq x_2$

• Pentru $\Delta = 0$ exista doua radacini reale, egale si confundate, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2*a}$

• Pentru $\Delta < 0$ exista nu exista radacini reale, sau altfel spus, exista doua radacini imaginare x_1 *si* x_2

• Relatiile lui Viète: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $P = x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$

• Aflarea ecuatiei daca se cunoaste suma si produsul radacinilor (de exemplu stim ca S=10 si P=20).
Ecuatia este: $x^2 - S * x + P = 0$
Pentru exemplul anterior obtinem ecuatia : $x^2 - 10 * x + 20 = 0$

Functia de gradul doi

$$y = a * x^2 + b * x + c = 0, \quad unde \quad a \neq 0$$

• Graficul functiei de gradul doi este o parabola
• Semnul functiei de gradul doi :

Regula : *Intre radacini semn contrar lui a, in afara radacinilor semnul lui a, în radacini egala cu zero.*

Aplicarea regulii depinde de Δ astfel :
- Pentru $\Delta > 0$ este exact dupa regula.
- Pentru $\Delta = 0$, NU exista zona intre radacini, deci functia va fi egala cu zero in radacini, in rest va avea semnul lui a.
- Pentru $\Delta < 0$, NU exista nici radacini, nici zona dintre radacini, deci functia va avea totdeauna semnul lui a.

• **Reprezentarea grafica a functiei de gradul doi.** Se urmeaza pasii:

1) Daca a > 0, functia are minim iar daca a < 0 are maxim.

2)Pentru minim si maxim se mai foloseste termenul de "Varf" sau de "extrem". Acesta este un punct sa zicem $V(x_v, y_v)$. El reprezinta cel mai de jos punct al graficului in cazul minimului, respectiv cel mai de sus punct in cazul maximului. Se calculeaza coordonatele varfului $V(x_v, y_v)$ cu formula $x_v = \frac{-b}{2*a}$ si $y_v = \frac{-\Delta}{4*a}$, deci practic se calculeaza varful $V(\frac{-b}{2*a}, \frac{-\Delta}{4*a})$.

3) Se afla intersectia cu axa Ox , facand y=0 in expresia $y = a * x^2 + b * x + c$, adica practic se rezolva ecuatia $a * x^2 + b * x + c = 0$. Valorile obtinute pentru x reprezinta intersectiile cu Ox. De exemplu daca obtinem doua valori x_1 si x_2, punctele de intersectie cu Ox vor fi $(x_1, 0)$ si $(x_2, 0)$.

4) Se afla intersectia cu axa Oy , facand x=0 in expresia $y = a * x^2 + b * x + c$, adica se obtine $y = a * 0^2 + b * 0 + c$, adica intotdeauna se obtine de fapt y=c. Punctul (o,c) reprezinta intersectia graficului cu Ox.

5) Se traseaza graficul folosind datele anterioare, in ordinea urmatoare: Se deseneaza axele XOY, se deseneaza varful V, se deseneaza forma varfului(minim sau maxim), se deseneaza intersectiile cu Ox si intersectia cu Oy si se unesc punctele obtinute. Se tine seama ca graficul este simetric fata de varf.

- **Monotonie:**

- Functia este descrescatoare de la $-\infty$ pana la x_{varf} si crescatoare in continuare, de la x_{varf} pana la $+\infty$ (daca Varful este minim, adica pentru $a > 0$) .Respectiv,

- Functia este crescatoare de la $-\infty$ pana la x_{varf} si descrescatoare in continuare, de la x_{varf} pana la $+\infty$ (daca Varful este maxim, adica pentru $a < 0$) .

Memo 9 Semnul functiei de gradul doi

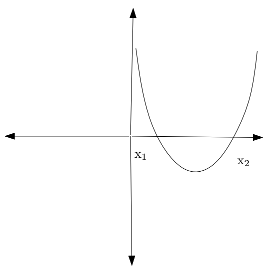
y=ax^2+bx+c, $a \neq$0

Graficul functiei de gradul doi este o parabola. Daca a>0, graficul functiei are minim, iar daca a<0, graficul functiei are maxim. Minimul, respectiv maximul se numeste varf, respectiv punct de extrem. Varful are coordonatele V($\frac{-b}{2a}$, $\frac{-\Delta}{4a}$)

Exista trei situatii diferite, dupa cum $\Delta > 0$ sau $\Delta = 0$ sau $\Delta < 0$

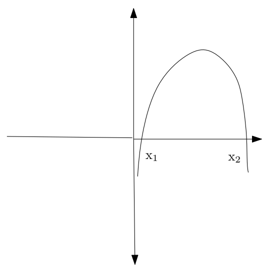
1. Pentru $\Delta > 0$, exista doua radacini reale, diferite, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

Graficul poate fi de genul urmator:



$\Delta > 0$ si $a > 0$

x	-∞	x_1		x_2	+∞
y=ax^2+bx+c	+ + +	0	- - -	0	+ + +



$\Delta > 0$ si $a < 0$

x	-∞	x_1		x_2	+∞
y=ax^2+bx+x	+ + +	0	- - -	0	+ + +

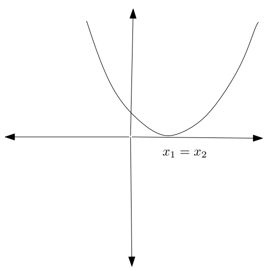
Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Intre radacini functia de gradul doi are semn contrar lui a, iar in afara radacinilor are semnul lui a. In radacini, functia este egala cu zero.

• Pentru $\Delta > 0$, functia nu are semn constant, fiind pozitiva pe anumite intervale si negativa pe altele.

2. Pentru $\Delta = 0$, exista doua radacini reale, egale, $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in R$.

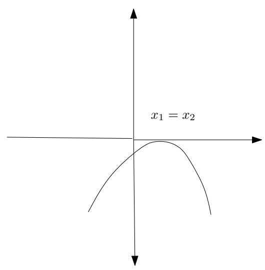
Graficul poate fi de genul urmator:



$\Delta = 0$ si $a > 0$

x	-∞	$x_1 = x_2$	+∞
y=ax^2+bx+c	+ + +	0	+ + +

y >=0



$\Delta = 0$ si $a < 0$

x	-∞	$x_1 = x_2$	+∞
y=ax^2+bx+x	- - -	0	- - -

y<= 0

Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Intervalul dintre radacini *a disparut, radacinile fiind egale, respectiv confundate*, prin urmare functia de gradul doi are valoarea zero in radacini si in rest semnul lui a.

• Pentru $\Delta = 0$, functia **nu schimba semnul** fiind pozitiva sau egala cu zero pentru $a > 0$, respectiv negativa sau egala cu zero pentru $a < 0$.

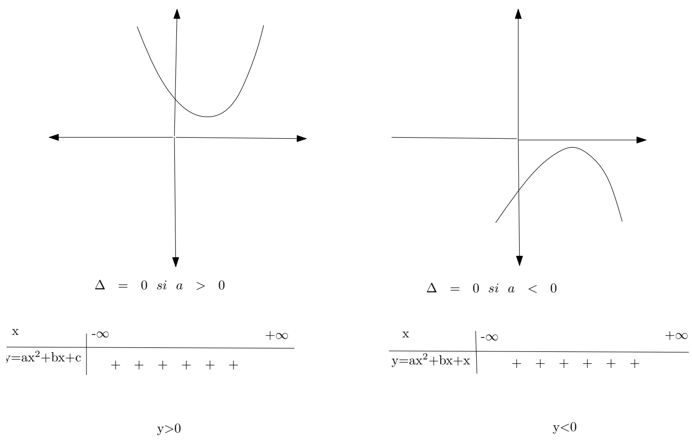
• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y >= 0$, se pun conditiile $\Delta = 0$ si $a > 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y <= 0$, se pun conditiile $\Delta = 0$ si $a < 0$.

---

3. Pentru $\Delta < 0$, nu exista radacini reale

Graficul poate fi de genul urmator:



Din analiza graficelor se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia de gradul doi are semnul lui a.

• Pentru $\Delta < 0$, functia **nu schimba semnul** fiind pozitiva pentru $a > 0$, respectiv negativa pentru $a < 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y > 0$(strict), se pun conditiile $\Delta < 0$ si $a > 0$.

• Daca intr-o problema este necesar sa se puna conditia pentru $y < 0$(strict), se pun conditiile $\Delta < 0$ si $a < 0$.

Memo 10 Functii injective, surjective, bijective

Injectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este injectiva, daca pentru $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ **, pentru orice** $x_1, x_2 \in A$

Demonstrarea injectivitatii se poate face prin mai multe metode, alegerea metodei depinzand de tipul de functie analizata. De exemplu:

1. Daca f(x) se poate **reprezenta grafic**, pentru ca f(x) sa fie injectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei intr-un punct sau niciunul.** Cu alte cuvinte, orice paralela la Ox prin codomeniu, trebuie sa intersecteze graficul functiei in cel mult un punct.

2. Daca f(x) se poate **reprezenta ca o diagrama**, de obicei pentru probleme la care domeniul de definitie A este o multimi finita, functia nu este injectiva daca exista valori in codomeniu, carora le corespund mai mult de un element din domeniul de definitie.

3. Daca f(x) nu se poate nici reprezenta grafic, nici ca diagrama, se poate incerca **prin calcul algebric**, adica se considera $x_1 \neq x_2$ si se incearca sa se arate ca $f(x_1) \neq f(x_2)$. Practic se porneste de la diferenta $f(x_1) - f(x_2)$ si prin diverse calcule se incearca se sa arate ca aceasta diferenta este diferita de zero. Eventula se poate porni de la raportul $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ si se incearca sa se demonstreze ca acest raport este diferit de 1.

4. Injectivitatea se poate verifica si utilizand materie de **analiza matematica**, studiata in clasa a XI-a . Practic, pentru functia f(x) se calculeaza derivata f'(x) si daca se arata ca f'(x) este tot timpul pozitiva pe domeniul de definitie, inseamna ca functia f(x) este crescatoare. Daca functie este crescatoare, inseamna automat ca functia este injectiva, deoarece $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Similar, daca in schimb se obtine f'(x) tot timpul negativa pe domeniul de definitie, inseamna ca functia f(x) este descrescatoare. Daca functie este descrescatoare, inseamna automat ca functia este injectiva, deoarece $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se observa ca s-a folosit proprietatea ca o functie monotona (indiferent daca este crescatoare sau descrescatoare) este injectiva. Studiul monotoniei functiei s-a realizat prin studiul semnului derivatei functiei. Faptul ca daca f'>0 inseamna ca f=crescatoare, respectiv daca f'<0 inseamna ca f=descrescatoare, reprezinta consecinte ale teoremei lui Lagrange.

Surjectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este surjectiva, daca pentru y $\in$ B, exista x $\in$ A, astfel incat y=f(x).

Demonstrarea surjectivitatii se poate face prin mai multe metode, alegerea metodei depinzand de tipul de functie analizata. De exemplu:

1. Daca f(x) se poate **reprezenta grafic**, pentru ca f(x) sa fie surjectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei intr-un punct sau mai multe.** Cu alte cuvinte, orice paralela la Ox prin codomeniu, trebuie sa intersecteze graficul functiei in cel putin un punct.

2. Daca f(x) se poate **reprezenta ca o diagrama**, de obicei pentru probleme la care domeniul de definitie A este o multimi finita, functia nu este surjectiva daca exista valori in codomeniu, carora **nu le corespunde niciun element din domeniul de definitie.**

3. Daca f(x) nu se poate nici reprezenta grafic, nici ca diagrama, se poate incerca **prin calcul algebric**, adica **se noteaza f(x) cu y se apoi scoate x in functie de y.** Din aceasta expresie a lui x in functie de y, **se analizeaza daca pentru orice y din codomeniu, exista x corespunzator din domeniul de definitie.**

De exemplu pentru f:R $\rightarrow$ R, f(x)=x^2+1, se face y=x^2+1 si se scoate x=$\pm\sqrt{y-1}$. Pentru a exista radicalul trebuie ca y-1 >=0, adica y>=1, adica y $\in$ [1,∞). Codomeniul fiind R, inseamna ca pentru y $\in$ (-∞,1) nu exista x $\in$ R corespunzator, astfel incat y=f(x), deci functia nu este surjectiva.

4. Injectivitatea se poate verifica si utilizand materie de **analiza matematica**, studiata in clasa a XI-a . Se utilizeaza notiunea de continuitate a unei functii si proprietatea lui Darboux. De exemplu pentru f(x)=2^x+3^x, deoarece functia este continua, inseamna ca are proprietatea lui Darboux, prin urmare este surjectiva. Se reaminteste **proprietatea lui Darboux:**

O functie are proprietatea lui Darboux, daca transforma un interval in alt interval. Adica, pentru f: I $\rightarrow$ J, spunem ca f are proprietatea lui Darboux, daca pentru domeniul de definitie I, fiind interval, se obtine prin functia f, codomeniul J tot ca interval. Functiile continue au proprietatea lui Darboux. Prin urmare daca I=interval, stabilirea surjectivitatii se reduce la studiul continuitatii functiei si la invocarea implicatiei continuitatii asupra proprietatii lui Darboux.

Bijectivitate

Definitie Fie o functie f: A $\rightarrow$ B. Functia f este bijectiva, daca este atat injectiva cat si surjectiva.

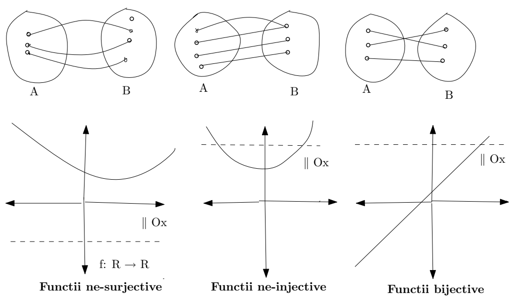
Studiul bijectivitatii se reduce la verificarea, pe rand, a injectivitatii si a surjectivitatii conform metodelor prezentate anterior. Daca functia este atat injectiva cat si surjectiva, se trage concluzia ca functia este bijectiva, in caz contrar se trage concluzia ca functia nu este bijectiva.

Se pot face urmatoarele observatii:

1. In cazul in care se foloseste **reprezentarea grafica,** pentru ca o functie sa fie bijectiva, adica atat injectiva cat si surjectiva, trebuie ca **orice paralela la Ox, dusa prin B, sa taie graficul functiei exact intr-un punct**.

2. In cazul in care se foloseste **reprezentarea ca diagrama,** pentru ca o functie sa fie bijectiva, adica atat injectiva cat si surjectiva, trebuie ca in diagrama sa fie corespondenta de 1 la 1, adica la orice element x $\in$ A sa corespunda exact un element y $\in$ B si reciproc. Altfel spus, sa fie o **corespondenta 1 la 1**, care se mai numeste si **corespondenta biunivoca**.

Exemple



Memo 11: Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Progresii aritmetice

• Definitie: Progresie aritmetica = un sir $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea ca fiecare termen este egal cu termenul de dinainte plus ratia(notata r). Cu alte cuvinte, $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, s.a.m.d. Mai precis spus, $a_n - a_{n-1} = r$ pentru $n >= 2$. Adica o P.A. este un sir $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea ca

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$$

Aceasta este formula 1. Ratia poate fi sau pozitiva, sau negativa.
Trebuie ca n sa fie >= 2, deoarece a_1 nu are termen anterior.

• Formula 2 = Exprimare a_n in functie de primul termen (a_1) si ratie(r).
Deoarece $a_1 = a_1$
Deoarece $a_2 = a_1 + r$
Deoarece $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 * r$
Deoarece $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3 * r$, s.a.m.d., se obtine formula:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) * r}$$

• Formula 3 = Verificare daca trei numere sunt in progresie aritmetica
Pentru a verifica daca numerele A, B, C sunt in P.A., se verifica daca este indeplinita conditia:

$$\mathbf{B = \frac{A + C}{2}}$$

adica daca cel din mijloc e media aritmetica a vecinilor.
E firesc sa fie asa, deoarece A= B - r, C= B+r , deci $A + C = 2 * B$

• Formula 4 = Suma unei progresii aritmetice
Pentru progresia aritmetica $a_1, a_2, ..., a_n$, suma

$$\mathbf{S = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}}$$

Se retine usor dupa formularea $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{(PrimulTermen+UltimulTermen)*n}}{\mathbf{2}}$

Demonstratia este simpla si anume:
S=$a_1+a_2+...+a_n = a_1+(a_1+r)+(a_1+2*r)+(a_1+3*r)+....(a_1+(n-1)*r)$
$= (a_1*n+r+2*r+3*r+...(n-1)*r) = n*a_1+r*(1+2+...+(n-1)) =$
$= n * a_1 + r * \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = n * a_1 + \frac{r*n*(n-1)}{2} = \frac{2*a_1+(n-1)*r}{2} * n = \frac{a_1+a_1+(n-1)*r}{2} * n$
Deci S=$\frac{(a_1+a_n)*n}{2}$

• Formula 5 = Suma unei progresii aritmetice, alta formula
Daca se exprima $a_n = a_1 + (n - 1) * r$ in formula anterioara, se obtine inca o formula pentru S si anume:

$$\mathbf{S = \frac{(2 * a_1 + (n - 1) * r) * n}{2}}$$

Recomandare : Daca in problema se cunoaste primul termen si ultimul, e utila formula 4, iar daca se cunoaste primul termen si ratia, e utila formula 5. In ambele situatii trebuie sa cunoastem numarul de termeni ai progresiei, notat cu n.

Progresii geometrice

• Definitie: Progresie geometrica = un sir $b_1, b_2, ..., b_n$ cu proprietatea ca fiecare termen este egal cu termenul de dinainte inmultit cu ratia(notata q). Cu alte cuvinte, $b_2 = b_1 * q$, $b_3 = b_2 * q$, s.a.m.d. Mai precis spus, $b_n = b_{n-1} * q$ pentru $n >= 2$. Adica o P.G. este un sir $b_1, b_2, ..., b_n$ cu proprietatea ca

$$\mathbf{b_n = b_{n-1} * q}$$

Aceasta este formula 1. Ratia poate fi sau pozitiva, sau negativa.
Trebuie ca n sa fie >= 2, deoarece b_1 nu are termen anterior.

• Formula 2 = Exprimare b_n in functie de primul termen (b_1) si ratie(q).
Deoarece $b_1 = b_1$
Deoarece $b_2 = b_1 * q$
Deoarece $b_3 = b_2 * q = b_1 * q^2$
Deoarece $b_4 = b_3 * q = b_1 * q^3$, s.a.m.d., se obtine formula:

$$\mathbf{b_n = b_1 * q^{n-1}}$$

• Formula 3 = Verificare daca trei numere sunt in progresie geometrica
Pentru a verifica daca numerele A, B, C sunt in P.G., se verifica daca este indeplinita conditia:

$$\mathbf{B = \sqrt{A * C}}$$

adica daca cel din mijloc e media geometrica a vecinilor.
E firesc sa fie asa, deoarece $A = \frac{B}{q}$, $C = B * q$, deci $A * C = B^2$, adica $B = \sqrt{A * C}$

• Formula 4 = Suma unei progresii geometrice
Pentru progresia geometrica $b_1, b_2, ..., b_n$, suma

$$\mathbf{S = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 * (\frac{q^n - 1}{q - 1})}$$

Demonstratia este simpla si anume:
S=$b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 + (b_1 * q) + (b_1 * q^2) + (b_1 * q^3) + ...(b_1 * q^{n-1})$
$= b_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}) = b_1 * (\frac{q^n-1}{q-1})$ c.c.t.d

Am folosit formula $x^n - 1^n = (x - 1) * (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$ unde pe rol de x am folosit q si am scos pe $(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = \frac{x^n-1}{x-1}$

Memo 12 Functia exponentiala

y=a^x, $a>$0 , a$\neq 1$

Exista doua situatii diferite, dupa cum a>1 sau a$\in$(0,1)

Argumentarea faptului ca $a>$0 , a$\neq 1$

Valoarea lui **a nu poate avea** urmatoarele valori:

-Nu trebuie ca a sa fie egal cu 0, deoarece 0 la orice putere este egal cu 0.

-Nu trebuie ca a sa fie egal cu 1, deoarece 1 la orice putere este egal cu 1.

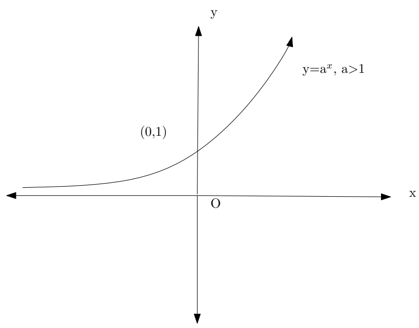
-Nu trebuie ca a sa fie negativ. De exemplu daca avem a=-3 si x=$\frac{1}{2}$, am obtine a^x = (-3)$^{\frac{1}{2}}$, adica a^x = $\sqrt{-3}$, adica radical din numar negativ, care nu apartine lui R.

Din valorile a $\in$ R, daca eliminam a=0, a=1 si a<0, obtinem doua intervale permise si anume a $\in$ (0,1) si a $\in$ (1,∞) , sau altfel spus, a>0 si a $\neq$1

Caz 1. a>1 Fie de exemplu y=2^x. Trasam graficul functiei prin puncte, dand valori lui x:

```
 x | ...   -3   -2     -1   0   1   2  3 ....
---|---------------------------------------
 y |       1/8  1/4    1/2  1   2   4  8
```

Se obtine graficul urmator:



Din analiza graficului se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia y=a^x, a> 1 este definita pe R si ia valori in (0,∞), adica f: R $\rightarrow$ (0,∞), prin urmare domeniul de definitie este R, iar codomeniul este (0,∞). Se observa ca orice paralela la axa Ox, dusa prin codomeniu intersecteaza graficul functiei in exact un punct, prin urmare functia este bijectiva. Fiind bijectiva, inseamna ca este atat surjectiva cat si injectiva. Datorita faptului ca este injectiva, adica daca f(x$_1$)=f(x$_2$) inseamna ca x$_1$=x$_2$, in cazul in care obtinem o ecuatie de forma a$^{f(x)}$=a$^{g(x)}$, putem trage concluzia ca f(x)=g(x).

• a^x > 0 pentru orice x $\in$ R. Deci daca se obtine o ecuatie de exemplu 5^x=-25 inseamna ca ecuatia nu are solutii, deoarece 5^x este intotdeauna pozitiv.

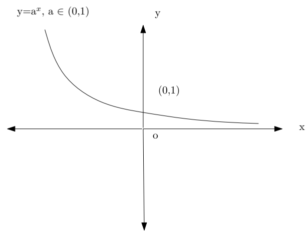
• Functia a^x , pentru a> 1 este **crescatoare**, adica daca $x_1 < x_2$ inseamna ca $f(x_1) < f(x_2)$ si reciproc. Daca obtinem o inecuatie de exemplu 2^x <8, putem trage concluzia ca x< 3.

• Deoarece a^0=0, graficul functiei y=a^x trece prin punctul (0,1) pentru orice a> 1

Caz 2. **a∈(0,1)** Fie de exemplu y=$(\frac{1}{2})^x$. Trasam graficul functiei prin puncte, dand valori lui x:

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3 ....
y		8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Se obtine graficul urmator:



Din analiza graficului se pot desprinde urmatoarele observatii:

• Functia y=a^x, a∈ (0,1) este definita pe R si ia valori in (0,∞), adica f: R → (0,∞), prin urmare domeniul de definitie este R, iar codomeniul este (0,∞). Se observa ca orice paralela la axa Ox, dusa prin codomeniu intersecteaza graficul functiei in exact un punct, prin urmare functia este bijectiva. Fiind bijectiva, inseamna ca este atat surjectiva cat si injectiva. Datorita faptului ca este injectiva, adica daca f(x_1)=f(x_2) inseamna ca x_1=x_2, in cazul in care obtinem o ecuatie de forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, putem trage concluzia ca f(x)=g(x).

• $a^x > 0$ pentru orice x ∈ R. Deci daca se obtine o ecuatie de exemplu $(\frac{1}{5})^x$=-$(\frac{1}{25})$ inseamna ca ecuatia nu are solutii, deoarece $(\frac{1}{5})^x$ este intotdeauna pozitiv.

• Functia a^x , pentru a∈ (0,1) este **descrescatoare** , adica daca $x_1 < x_2$ inseamna ca $f(x_1) > f(x_2)$ si reciproc. Daca obtinem o inecuatie de exemplu $(\frac{1}{2})^x < \frac{1}{8}$, putem trage concluzia ca x> 3.

• Deoarece a^0=0, graficul functiei y=a^x trece prin punctul (0,1) pentru orice a∈ (0,1).

• **Practic la rezolvarea ecuatiilor exponentiale** se incearca sa se ajunga prin diverse artificii la o ecuatie de forma $a^{f(x)}$=$a^{g(x)}$, de unde se trage concluzia ca f(x)=g(x).

• **Practic la rezolvarea inecuatiilor exponentiale** se incearca sa se ajunga prin diverse artificii la o inecuatie de forma $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, care se interpreteaza dupa valoarea lui a si anume daca a> 1 se pastreaza semnul inegalitatii intre f(x) si g(x), respectiv daca a∈ (0,1), se inverseaza semnul inegalitatii intre f(x) si g(x).

• Sunt utile de reamintit formulele de la puteri
$(a^m)^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, a^0=1, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

• **Functia exponentiala** y=a^x : R → (0,∞) fiind bijectiva, admite o functie inversa si anume **functia logaritmica** y=$\log_a^x$: (0,∞) → R, al carei grafic este simetric fata de y=a^x in raport cu bisectoarea intai, y=x. Bineinteles ca se genereaza doua situatii pentru $\log_a^x$ si anume pentru a>1 si pentru a∈(0,1).

Memo 13 Logaritmi

Formule:

1) Definitie: log_a^X este un numar N, cu proprietatea ca,

$$\text{daca } log_a^X = N, \text{ atunci } X = a^N$$

De exemplu $log_{10}^{100} = 2$ deoarece $100 = 10^2$

2) $log_a^A + log_a^B = log_a^{A*B}$

3) $log_a^A - log_a^B = log_a^{\frac{A}{B}}$

4) $log_a^{A^m} = m * log_a^A$

5) $log_a^a = 1$

6) $log_{a=veche}^X = \frac{log_{b=noua}^X}{log_{b=noua}^{a=veche}}$

7) $log_{a^m}^X = \frac{1}{m} * log_a^X$

8) $log_a \sqrt[m]{X^n} = log_a^{X^{\frac{n}{m}}} = \frac{n}{m} * log_a^X$

Domeniul de definitie:

Pentru $log_a A$ este necesar ca

- A >0 → obtinem de exemplu x apartine interval I_1
- a >0 si a ≠1 → obtinem de exemplu x apartine interval I_2

Domeniul de definitie este I_1 intersectat cu I_2

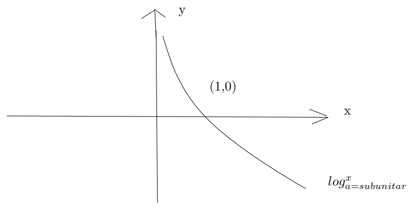
Baza logaritmului:

- lg^X inseamna log_{10}^X adica *logaritm zecimal*
- ln^X inseamna log_e^X adica *logaritm natural*, unde e=2.7

Baza subunitara sau baza supraunitara.
Datorita conditiei de la *domeniul de definitie* , pentru log_a^X, deoarece trebuie ca $a > 0$ si $a \neq 1$, practic exista doua situatii pentru baza logaritmului:

-CAZ 1: a intre (0,1). In acest caz, functia logaritm este , descrescatoare, de exemplu daca stim ca a este intre (0,1) si obtinem intr-o problema $log_a^A < log_a^B$, putem trage concluzia ca $A > B$.

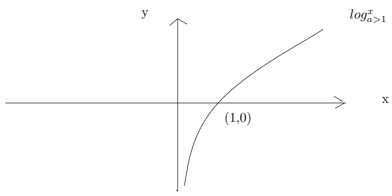
Graficul functiei logaritm, pentru baza **subunitara** este urmatorul:



Se observa din grafic urmatoarele:

• $log_a^X : R \rightarrow (0, \infty)$
• functia este descrescatoare
• $log_a^1 = 0$
• functia este pozitiva pentru X intre (0,1)
• functia este nula pentru X=1
• functia este negativa pentru X>1.

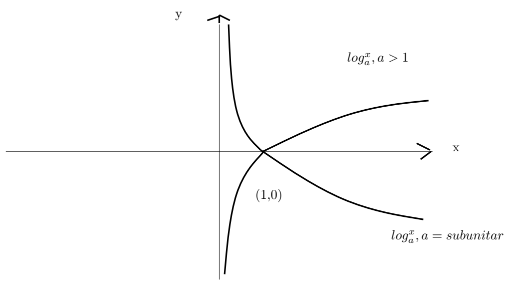
- CAZ 2: a intre (1,∞) In acest caz, functia logaritm este , crescatoare, de exemplu daca stim ca a este intre (1,∞) si obtinem intr-o problema $log_a^A < log_a^B$, putem trage concluzia ca $A < B$. Graficul functiei logaritm, pentru baza **supraunitara** este urmatorul:



Se observa din grafic urmatoarele:

• $log_a^X : R \rightarrow (0, \infty)$
• functia este crescatoare
• $log_a^1 = 0$
• functia este negativa pentru X intre (0,1)
• functia este nula pentru X=1
• functia este pozitiva pentru X>1.

Ambele cazuri se pot sintetiza intr-un singur grafic:



Memo 14 Analiza combinatorie

Factorialul, Permutari, Aranjamente, Combinari

Factorialul

• Prin definitie **n factorial** se noteaza cu **n!** si are urmatoarea formula de calcul:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$$

• Exemple:

a) 3!=$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

b) 1!=1

c) 0!=1 (=surprinzator la prima vedere, se va explica ulterior)

• Rezulta urmatoarele formule:

n!=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$, deci se poate scrie si astfel:

n!=(n-1)!$\cdot n$

n!=(n-2)!$\cdot (n-1) \cdot n$

n!=(n-3)!$\cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, s.a.m.d.

Permutari

• **Permutari de n elemente** se noteaza cu P_n si are urmatoarea formula de calcul:

$$P_n = n!$$

deci $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot (n-1) \cdot n$

• Exemplu:

a) P_3 = 3!=$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

• Ce inseamna "Permutari de n elemente"

Daca avem de exemplu un numar de n=3 elemente $\{a, b, c\}$, P_3 ne arata **in cate moduri** pot "permuta(= schimba intre ele cele 3 elemente)", astfel incat sa formeze "echipe" care :

a) sa contina toate cele n elemente(atat a cat si b cat si c)
b) nici un element sa nu se repete.

Practic pot forma urmatoarele "echipe" :

{abc} {acb} {bac} {bca} {cab} {cba}

Daca numaram "echipele anterioare" se vede ca sunt 6 . Intradevar 6= $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. In concluzie cu P_n pot afla **numarul de "echipe"** care se pot genera, deci ne da **cate echipe sunt, nu care sunt aceste echipe**.

Aranjamente

• **Aranjamente de n elemente luate cate k** se noteaza cu A_n^k si are urmatoarea formula de calcul:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot (n-k+1)$$

• Exemplu:
$A_{10}^4 = 10 \cdot 9...(10-4+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
• Ce inseamna A_n^k:

Exemplul 1: De exemplu daca avem 30 de elevi si vrem sa ii grupam cate 2 in banca , numarul acestor grupari este dat de A_{30}^2, si anume dupa formula anterioara se poate calcula $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$ adica se pot "aranja" in 870 de moduri.

Exemplul 2: Daca avem n=3 elemente de exemplu multimea $\{a, b, c\}$ si vrem sa "aranjam" aceste elemente in grupa de cate 2, obtinem:

{ab} {ac} {bc} {ba} {cb} {ca} Observam ca sunt 6 grupari, adica $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Se observa ca apare atat gruparea $\{ab\}$ cat si gruparea $\{ba\}$ adica **conteaza ordinea elementelor.**

Practic A_n^k seamana cu P_n cu diferenta ca in "echipa" nu intra toate cele n elemente ci doar k (unde k $\leq$ n).

• Domeniul de definitie:

Pentru A_n^k trebuie ca n, k $\in$ N si n $\geq$ k

Se poate imagina absurditatea situatiilor pentru n $<$ k sau pentru n, k nenaturale(de exemplu negative, fractionare, s.a.m.d)

Combinari

• **Combinari de n elemente luate cate k** se noteaza cu C_n^k si are urmatoarea formula de calcul:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

• **Practic** Se foloseste formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Exemplu:
$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$
• Ce inseamna C_n^k:

Exemplul: Daca avem n=3 elemente de exemplu multimea $\{a, b, c\}$ si vrem sa "combinam" aceste elemente in grupa de cate 2, obtinem:

{ab} {ac} {bc} Observam ca sunt 3 grupari, adica $C_3^2 = 3$. Se observa ca apare apare gruparea $\{ab\}$ **dar nu si gruparea** $\{ba\}$ adica **nu conteaza ordinea elementelor.**

Practic C_n^k seamana cu A_n^k cu diferenta ca in "echipa" nu conteaza ordinea elementelor, adica {a,b } se considera identic cu {b,a }, deci "se numara" o singura data . Se observa si din formula de definitie ca $C_n^k \leq A_n^k$

• Domeniul de definitie:

Pentru C_n^k trebuie ca n, k $\in$ N si n $\geq$ k , ca si in cazul aranjamentelor.

Memo 15 Binomul lui Newton

1. Formula binomului lui Newton

Se observa ca urmatoarele formule au structura asemanatoare:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, s.a.m.d.

In general pentru $(a+b)^n$ se observa urmatoarele:

Exista n+1 termeni, primul termen fiind a^n, iar ultimul b^n. Mai exact primul este $a^n b^0$ iar ultimul $a^0 \cdot b^n$, in general avem termeni de genul $a^{n-k} b^k$, unde k ia valori de la 0 la n. Acesti termeni sunt fiecare inmultiti cu cate un coeficient. Acesti coeficienti au formula C_n^k.

Gruparea $(a+b)^n$ fiind formata din doi termeni, se numeste binom. Dupa numele persoanei care a descoperit formula urmatoare, aceasta se numeste **binomul lui Newton**:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot b^n$$

Se pot face urmatoarele observatii:

- Exista n+1 termeni, deoarece k ia valori intre 0 si n.

- Primul termen este de fapt egal cu a^n, deoarece $C_n^0=1$ si $b^0=1$.

- Ultimul termen este de fapt egal cu b^n, deoarece $C_n^n=1$ si $a^0=1$.

- Coeficientii C_n^0 , C_n^1 , $\cdots$ C_n^n se numesc **coeficienti binomiali**.

- **Coeficientii binomiali egal departati sunt egali**, deoarece se poate demonstra usor ca $C_n^k = C_n^{n-k}$.

- Binomul lui Newton se poate scrie concentrat sub forma urmatoare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

deci ca o suma avand termenul general

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Se observa ca primul termen T_1 are k=0, termenul al doilea T_2 are k=1, s.a.m.d. deci intradevar este justificata notatia de T_{k+1} pentru o valoare k.

- Daca binomul este o diferenta in loc de suma:

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot (-b)^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot (-b)^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \cdots C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

adica are loc o alternanta de semne incepand cu + apoi - s.a.m.d.

$$(a-b)^n = (a+[-b])^n = C_n^0 \cdot a^{n-0} \cdot b^0 - C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot a^{n-n} \cdot (-b)^n$$

- Acum se poate scrie formula binomului lui Newton la modul cel mai general general:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

deci ca o suma avand termenul general

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

---

2. Formule utile

• Majoritatea problemelor cu binomul lui Newton se rezolva **pornind de la formula**

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

• Se dezvolta cu binomul lui Newton urmatoarele doua binoame:

$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \cdots C_n^n$ (1)

$(1-1)^n = 0 \ = C_n^0 - C_n^1 - C_n^2 \cdots C_n^n$ (2)

Adunand relatia (1) cu relatia (2) se obtine: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = 2^{n-1}$

Scazand relatiile (1) - (2) se obtine: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$

In concluzie **suma coeficientilor binomiali pari, este egala cu suma coeficientilor binomiali impari si este egala cu** 2^{n-1} :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$$

• Pentru problemele la care se cere determinarea celui mai mare termen al dezvoltarii, se porneste de la raportul $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ care se compara cu 1. Adica se porneste de la $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}} > 1$ si din aceasta relatie se scoate k. Apoi se interpreteaza k si se afla termenul maxim. Pentru un binom $(a+b)^n$, raportul

$$\frac{T_{k+1}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}$$

Formula fiind dificil de retinut, se recomanda sa se demonstreze ad-hoc, pornind de la raportul $\frac{T_{k+1}}{T_{k+2}}$ si exprimand termenii T_{k+1} si T_{k+2} cu formula obisnuita $T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Exemple: Gasiti rangul celui mai mare termen al dezvoltarii:

$$a)\ (1+0.1)^{100} \qquad b)\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{100} \qquad c)\ (\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^{100}$$

Memo 16 Polinoame

1. Impartirea polinoamelor

• **Metoda 1** Metoda clasica de impartire a doua polinoame f(x) si g(x), dupa metoda studiata in clasa a VIII a. Are avantajul ca impartitorul g(x) poate fi de orice grad. Se recomanda efectuarea probei conform formulei:

$$\textbf{Deimpartitul} = \textbf{Impartitorul} \times \textbf{Catul} + \textbf{Restul}$$

• **Metoda 2** Folosind schema lui Horner pentru impartirea a doua polinoame f(x) si g(x), unde g(x) este de forma (x-a). Are dezavantajul ca g(x) trebuie sa fie de gradul I. Daca g(x) este de grad mai mare, se descompune g(x) in factori de gradul I, de exemplu x^2-25 =(x-5)(x-(-5)) si se imparte succesiv f la (x-5) si apoi catul obtinut se imparte la x-(-5). Schema lui Horner are avantajul ca se preteaza la prelucrare pe calculator.

2. Divizibilitatea polinoamelor

Pentru a determina **cmmdc** a doua polinoame, se foloseste **algoritmul lui Euclid** si anume:

Se imparte f(x) la g(x) si se obtine un cat si un rest. In continuare se imparte deimpartitul la restul obtinut. Se tot efectueaza impartiri ale deimpartiului la rest, pana se obtine rest=0. **Ultimul rest nenul este cmmdc(f,g).**

Mentiune 1 Daca se cere **cmmmc(f,g)** se foloseste proprietatea ca

$$\textbf{cmmmc(f,g)} \cdot \textbf{cmmdc(f,g)} = \textbf{f} \cdot \textbf{g}$$

Practic, se calculeaza f ·g si apoi se calculeaza cmmdc(f,g) cu algoritmul lui Euclid. In continuare se afla cmmmc(f,g)=$\frac{\mathrm{f \cdot g}}{\mathrm{cmmdc(f,g)}}$

Mentiune 2 Daca se cere sa se verifice daca f si g sunt **prime intre ele** se foloseste proprietatea ca **doua polinoame sunt prime daca au cmmdc=1.**

Practic, se calculeaza cmmdc(f,g) cu algoritmul lui Euclid si daca se obtine cmmdc(f,g)=1 se trage concluzia ca f si g sunt prime, altfel se trage concluzia ca nu sunt prime.

3. Radacinile ecuatiilor de grad superior. Radacini multiple.

• Un polinom P_n de gradul n, avand radacinile $x_1, x_2, \cdots x_n$ se poate scrie sub forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

• Daca un polinom P(X) admite radacina x=a, atunci P(a)=0 (Teorema lui Bézout).

• Radacini multiple. O ecuatie poate avea radacini multiple (duble, triple, etc), in general de ordinul k de multiplicitate.

De exemplu x=α este radacina dubla daca x_1=x_2=α. In acest caz P(x) apare de forma:

$$P(x)_n = (x-\alpha)^2 \cdot (x-x_3) \cdots (x-x_n)$$

Inseamna ca P(x) se imparte exact la (x-α)^2, adica se imparte de exemplu cu schema lui Horner la (x-α) si apoi catul obtinut se imparte tot exact la (x-α). Alta abordare a problemei este sa se imparta P(x) la (x-a)^2, adica la x^2-2ax+a^2 prin metoda clasica de impartire de polinoame si sa se puna conditia ca restul sa fie zero.

Cel mai operativ pentru radacini multiple, este sa se foloseasca urmatoarea teorie:

Un polinom P(x) are radacina x=α ca radacina multipla de ordinul k de multiplicitate, daca:

$$P(\alpha) = 0$$
$$P^{'}(\alpha) = 0$$
$$P^{''}(\alpha) = 0$$
$$\cdots$$
$$P^{k-1}(\alpha) = 0$$
$$P^{k}(\alpha) \neq 0$$

---

4. Relatiile lui Viète

Fie de exemplu ecuatia de gradul 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avand radacinile x_1,x_2,x_3 .

Se pot scrie urmatoarele sume, numite relatiile lui Viète :

$$\begin{cases} S_1 = & x_1 + x_2 + x_3 & = -\frac{b}{a} \\ S_2 = & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 & = +\frac{c}{a} \\ S_3 = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

In mod similar se pot scrie relatiile lui Viète pentru orice grad n.

Daca se cunosc radacinile unei ecuatii , de exemplu y_1,y_2,y_3 $\cdots$ y_n, si se doreste aflarea ecuatiei care are acele radacini, se calculeaza sumele lui Viète S_1,S_1, $\cdots$ S_n, apoi se scrie expresia ecuatiei care are acele radacini:

$$1 \cdot Y^n - S_1 \cdot Y^{n-1} + S_2 \cdot Y^{n-2} \cdots S_n = 0$$

---

5. Rezolvari avansate ale ecuatiilor de grad superior

In afara de metodele de rezolvare clasice a ecuatiilor de grad superior, se pot folosi si metode avansate care utilizeaza derivatele, de exemplu:

- Folosind **Sirul lui Rolle**.
- Folosind reprezentarea grafica a functiilor care formeaza ecuatia.

Memo 17 ecuatii de grad superior

Partea a I-a

Tip 1. Ecuatii bipatrate

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$

Idee: Se noteaza $x^2 = y$ si se obtine ecuatie de gradul doi care se rezolva, apoi se afla x_1, x_2, x_3, x_4.

Tip 2. Ecuatii reciproce de grad trei

Exemplu: Rezolvati ecuatia $5x^3 + 31x^2 + 31x^1 + 5 = 0$

Teorie 1: Se numeste **ecuatie reciproca**, o ecuatie care are coeficientii egal departati, egali.

Teorie 2: Orice ecuatie reciproca de grad impar admite radacina x=-1.

Teorie 3: Un polinom P_n de gradul n, avand radacinile $x_1, x_2, \cdots x_n$ se poate scrie sub forma:

$$P_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Teorie 4: Daca avem pentru o impartire Deimpartit, Impartitor, Cat, Rest, este corecta relatia:

$$Deimpartitul = Catul \cdot Impartitorul + Restul$$

Idee: Fie $P_3(x)$ expresia egala cu zero. Deoarece admite radacina x=-1, inseamna ca $P_3(x)$ se imparte la x-(-1) adica la x+1. Se efectueaza impartirea $P_3(x)$ la (x+1) si obtinem $Cat_2(x)$ si rest=0. Deci $P_3(x) = (x+1) \cdot Cat_2(x)$. Rezolvam $Cat_2(x) = 0$ si aflam celelalte doua radacini.

Tip 3. Ecuatii reciproce de grad patru

Exemplu: Rezolvati ecuatia $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x^1 + 2 = 0$

Idee: Se imparte ecuatia cu x^2, dupa care se noteaza $(x + \frac{1}{x}) = y$. Se exprima totul in y. Se rezolva ecuatia de gradul doi in y, apoi se afla x_1, x_2, x_3, x_4.

Tip 4. Ecuatii reciproce de grad cinci

Exemplu: Rezolvati ecuatia $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x^1 + 20 = 0$

Idee: Fiind ecuatie reciproca de grad impar, are radacina x=-1. Se procedeaza ca in cazul ec. reciproce de grad trei si din $P_5(x) = (x+1)Q_4(x)$, prin impartirea lui $P_5(x)$ la (x+1) se obtine $Q_4(x)$ ca ecuatie reciproca de gradul 4, care se rezolva ca orice ecuatie reciproca de gradul patru.

Tip 5. Ecuatii care admit radacina $x = a + b \cdot i$

Exemplul 1: Rezolvati ecuatia $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^1 + e = 0$ stiind ca admite radacina x=1+i.

Teorie: Daca o ecuatie admite radacina x=a+bi, atunci admite si radacina x=a-bi

Idee: Fie de exemplu polinomul $P_4(x)$ care stim ca admite radacina $x_1 = a+bi$. Conform teoriei, $x_2 = a - bi$. Inseamna ca putem scrie

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculam $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ si scapam de i, notam forma obtinuta pentru comoditatea scrierii cu R(x). Deci $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Aflam pe $Q_2(x)$ impartind pe $P_4(x)$ la $Q_2(x)$. Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam de aici pe x_3, x_4. Pe x_1 in cunoastem din enunt ca fiind x=a+bi, iar pe x_2 in cunoastem din teorie ca fiind x=a-bi.

Exemplul 2: Determinati a si b, dupa care rezolvati ecuatia

$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax^1 + b = 0$$

stiind ca admite radacina x=1+2i

Teorie: Daca un polinom P(X) admite radacina x=a, atunci P(a)=0 (Teorema lui Bézout).

Idee: Deoarece P(x) admite radacinile x=a si x=b, conform teoremei lui Bézout, putem scrie ca P(a)=0 si P(b)=0. Am obtinut un sistem pe doua ecuatii cu doua necunoscute, pe care il rezolvam si aflam pe a si pe b. Acum cunoastem forma lui P(x) si folosim teorie conform careia daca polinomul admite radacina x=1+2i, inseamna ca admite si radacina x=1-2i. Procedam ca si in cazul problemei anterioare si aflam si celelalte radacini.

Tip 6. Ecuatii care admit radacina $x = a + \sqrt{b}$

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x^1 + 2 = 0$ stiind ca admite radacina $x = 1 - \sqrt{2}$.

Teorie: Daca o ecuatie admite radacina $x = a + \sqrt{b}$, atunci admite si radacina $x = a - \sqrt{b}$

Idee: Similar cu problema anterioara. Fie de exemplu polinomul $P_4(x)$ care stim ca admite radacina $x_1 = a + \sqrt{b}$. Conform teoriei, $x_2 = a - \sqrt{b}$. Inseamna ca putem scrie

$$P_4(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

Calculam $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ si scapam de $\sqrt{b}$, notam forma obtinuta pentru comoditatea scrierii cu R(x). Deci $P_4(x) = R(x) \cdot Q_2(x)$. Aflam pe $Q_2(x)$ impartind pe $P_4(x)$ la $Q_2(x)$. Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam de aici pe x_3, x_4. Pe x_1 in cunoastem din enunt ca fiind $x = a + \sqrt{b}$, iar pe x_2 in cunoastem din teorie ca fiind $x = a - \sqrt{b}$.

Memo 18 Ecuatii de grad superior - Continuare

Partea a -II - a

Tip 7. Ecuatii cu coeficientul de grad maxim =1

Exemplu: Rezolvati ecuatia $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$

Teorie: Radacinile intregi ale ecuatiei **ar putea fi** printre divizorii termenului liber.

Idee: Se scot divizorii termenului liber, ex: +1,-1,+2,-2,+4,-4 si se verifica pe rand daca sunt radacini cu teorema lui Bézout. Adica se verifica daca P(+1)=0. Daca este egal cu zero, inseamna ca este radacina, altfel nu este. Se fac verificarile pt toti divizorii termenului liber. Daca gasim de exemplu doua radacini, fie x_1 si x_2, scriem $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x)$. Calculam $(x - x_1)(x - x_2)$ si obtinem o ecuatie de gradul doi, o notam pt comoditatea scrierii cu R(x). Impartim pe P(x) la R(x) si obtinem $Q_2(x)$. Rezolvam $Q_2(x) = 0$ si aflam x_3 si x_4.

Tip 8. Caz general=Ecuatii cu coeficient de grad maxim diferit de 1
(Valabil si pentru coeficient grad maxim egal cu 1 ca si caz particular)

Exemplu: Rezolvati ecuatia $6x^4 - 17x^3 - x^2 + 8x - 2 = 0$

Teorie: Radacinile ecuatiei **ar putea fi** de forma $\alpha = \frac{p}{q}$, p=divizor al termenului liber , iar q=divizor al coeficientului de grad maxim.

Idee: Metoda implica multe calcule. Se scot divizorii termenului liber, ex: p= +1,-1,+2,-2 si divizorii coeficientului de rang maxim ex: q=+1,-1,+2,-2,+3,-3,+6,-6. Se formeaza toate combinatiile de tip $\alpha = \frac{p}{q}$, si anume $\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2} \cdot\cdot$, s.a.m.d. si se verifica cu teorema lui Bézout daca $P(\alpha)$=0. Daca se gasesc doua solutii, se procedeaza mai departe ca in cazul problemei anterioare.

Tip 9. Ecuatii binome

Exemplu: Rezolvati ecuatia $3x^7 = 5$

Teorie: Se aduce ecuatia la forma $x^n = a$ si se scrie numarul a ca numar complex, de forma $r(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha))$. Se folosesc eventual formele $1 = cos(0)+ i\cdot sin(0)$, respectiv $-1 = cos(\pi)+i\cdot sin(\pi)$. Se obtine $x^n = r(cos(\alpha)+i\cdot sin(\alpha))$ si se aplica formula radicalului dintr-un numar complex si obtinem radacinile:

$$x_k = \sqrt[n]{r}(cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}), k = 0, 1 \cdots k - 1$$

De exemplu pentru $3x^7 = 5$ se scrie $x^7 = \frac{5}{3} \cdot 1$, adica $x^7 = \frac{5}{3} \cdot (cos(0) + i \cdot sin(0))$ deci

$$x_k = \sqrt[n]{\frac{5}{3}}(cos\frac{0 + 2k\pi}{5} + i \cdot sin\frac{0 + 2k\pi}{5}), k = 0, 1 \cdots 4$$

Tip 10. Alte metode de rezolvare a ecuatiilor de grad superior

• Folosind teorema lui Bézout, pentru radacini multiple(materie clasa X)

• Folosind relatiile lui Viète(materie clasa X)

• Folosind sirul lui Rolle(materie de clasa XI, implica derivate)

• Rezolvare grafica(materie de clasa XI, uneori implica derivate)

1. Calculul determinantilor

a) Determinanti de ordin 1:

$$\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

b) Determinanti de ordin 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

c) Determinanti de ordin 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + b \cdot f \cdot g - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - f \cdot h \cdot a$$

Aceasta metoda se numeste *regula triunghiului*

d) Determinanti de ordin >= 4:

Nu exista o regula de genul regulilor anterioare, ci se procedeaza astfel:

Fie de exemplu urmatorul determinant de ordin 4:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

Se **dezvolta** determinantul dupa o linie sau dupa o coloana. De mentionat ca se poate alege orice linie , respectiv orice coloana, rezultatul obtinut este acelasi. Adica daca dezvoltam dupa linia 1 este ok, sau daca dupa linia 2 este tot ok, daca dezvoltam dupa coloana 1 este ok, dupa coloana 2 este tot ok, s.a.m.d.

Alegem de exemplu sa dezvoltam dupa linia 1. Dezvoltarea determinantului dupa linia 1 este urmatoarea:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot d \cdot \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Se observa ca pornind de la un determinant de ordin patru, am ajuns la determinanti de ordin trei, pe care ii putem calcula. Practic am reusit sa coboram

gradul determinantului cu o unitate. In general, pentru a calcula un determinant de ordin n , prin aceasta metoda se ajunge la determinanti de ordin *n-1* , apoi aplicand metoda din nou, determinantii de ordin *n-1* se reduc la determinanti de ordin *n-2* , s.a.m.d. pana se ajunge la determinanti de ordin 3, pentru care avem metoda efectiva de calcul.

Acest determinant ”redus”, de exemplu $\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$ pentru elementul aflat la intersectia liniei 1 cu coloana 1, se numeste **complement algebric**, (sau **minor**) si se noteaza cu Γ_{11}. In general la intersectia liniei i cu coloana j, se gaseste elementul a_{ij}, avand complementul algebric Γ_{ij}, (respectiv minorul Γ_{ij}). Dezvoltarea unui determinant dupa o anumita linie sau dupa o anumita coloana, reprezinta de fapt o suma de grupari de genul $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$ pentru acea linie, respectiv coloana. Dezvoltarea unui determinant se poate exprima pe scurt astfel:

$$d = \sum (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$$

---

2. Proprietati ale determinantilor

Se observa faptul ca un determinant este mai usor de calculat daca linia(sau coloana) dupa care se alege dezvoltarea are cat mai multe elemente egale cu zero. Din acest motiv, este de preferat ca pentru calculul unui determinant sa alegem o linie(sau coloana), sa facem cat mai multe zerouri pe acea linie(sau coloana) si doar apoi sa dezvoltam determinantul. Pentru a face zerouri pe o linie(sau coloana) se pot folosi urmatoarele proprietati:

a) Daca la un determinant se aduna o linie la alta linie, valoare determinantului este aceeasi. Daca notam de exemplu linia i cu L_i si linia j cu L_j , inseamna ca este corecta operatia $L_i = L_i + L_j$

b) Daca la un determinant se scade o linie din alta linie, valoare determinantului este aceeasi, adica este corecta operatia $L_i = L_i + L_j$

c) Daca la un determinant se inmulteste o linie cu un numar intreg, de exemplu α si apoi se aduna valoarea obtinuta la alta linie, valoare determinantului este aceeasi, adica este corecta operatia $L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$. Se observa ca pentru $\alpha = +1$ se obtine cazul **a)** iar pentru $\alpha = -1$ se obtine cazul **b)**. De remarcat ca α trebuie sa fie intreg, adica de exemplu $\alpha = \frac{1}{3}$ nu este ok.

In concluzie, de retinut ca sunt corecte urmatoarele relatii:

$$a)\;\; L_i = L_i + L_j \qquad b)\;\; L_i = L_i - L_j \qquad c)\;\; L_i = L_i + \alpha \cdot L_j$$

Similar si pentru coloane, adica notand coloana cu C, sunt corecte operatiile:

$$a)\;\; C_i = C_i + C_j \qquad b)\;\; C_i = C_i - C_j \qquad c)\;\; C_i = C_i + \alpha \cdot C_j$$

---

3. Din cele prezentate rezulta urmatoarele consecinte:

1) Un determinat are valoarea zero, daca are pe o linie (sau pe o coloana) toate elementele egale cu zero.

2) Un determinant are valoarea zero, daca are doua linii (sau doua coloane) identice.

3) Un determinant are valoarea zero, daca are doua linii (sau doua coloane) proportionale.

4) Se poate scoate factor comun de pe o linie(sau coloana) a unui determinant, adica de exemplu, este corecta urmatoarea operatiune:

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a & b \\ \alpha \cdot c & d \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

---

1. Notiunea de matrice

Definitie: O matrice reprezinta un tablou de elemente.

Fie de exemplu matricea X=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ care are 2 linii si trei coloane, deci putem spune ca X apartine multimii matricilor cu 2 linii si 3 coloane, adica X $\in \mathcal{M}_{2,3}$ De mentionat ca primul indice reprezinta numarul de linii iar al doilea indice reprezinta numarul de coloane. In general, multimea matricilor cu m linii si n coloane se noteaza cu $\mathcal{M}_{m,n}$

- Daca m=n, adica numarul de linii este egal cu numarul de coloane, matricea se numeste *matrice patratica*, iar multimea matricilor nu se scrie $\mathcal{M}_{m,m}$ ci mai simplu, $\mathcal{M}_m$. Daca m este diferit de n, matricea se mai numeste matrice dreptunghiulara.

- Daca m=1, adica matricea are o singura linie, matricea se numeste *matrice linie* si se poate scrie de exemplu X $\in \mathcal{M}_{1,n}$.

- Daca n=1, adica matricea are o singura coloana, matricea se numeste *matrice coloana* si se poate scrie de exemplu X $\in \mathcal{M}_{m,1}$.

- Se observa ca matricea linie si matricea coloana, reprezinta de fapt vectori.

2. Operatii cu matrici

Fie matricile:
A=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ si B=$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$

- **Adunare matrici:** A+B=$\begin{vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{vmatrix}$

- **Scadere matrici:** A - B=$\begin{vmatrix} a-A & b-B \\ c-C & d-D \end{vmatrix}$

- **Inmultire matrice cu un scalar:** $\alpha\cdot$ A=$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b \\ \alpha\cdot c & \alpha\cdot d \end{vmatrix}$, pt.$\alpha$ scalar.

- **Inmultirea a doua matrici:**

Fie matricile: A=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ si B=$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} aA+bD+cG & aB+bE+cH & aC+bF+cI \\ dA+eD+fG & dB+eE+fH & dC+eF+fI \end{vmatrix}$$

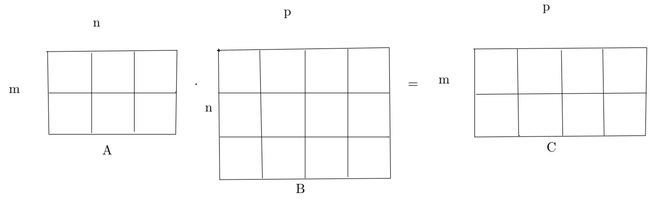
Se poate retine mai usor privind in acest mod: A·B=$\begin{vmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_3C_3 \end{vmatrix}$,

unde L_i=linia i , iar C_j=coloana j

Analizand algoritmul de inumltire a doua matrici, se observa ca daca se inmulteste o matrice cu *m linii* si *n coloane* cu o alta matrice avand *n linii* si *p coloane*, matricea rezultata va avea *m linii* si *p coloane* . Pentru a se putea

efectua inmultirea, este necesar ca numarul de linii a celei de a doua matrici sa fie egal cu numarul de coloane a primei matrici.

De exemplu pentru inmultirea A · B = C (unde A are m linii si n coloane, iar B are n linii si p coloane) se respecta regulile prezentate in urmatorul desen:



Se observa ca inmultirea matricilor NU este COMUTATIVA

• **Impartirea a doua matrici:**

Nu exista impartire a doua matrici. Pentru "simularea impartirii matricilor" se foloseste notiunea de *matrice inversa,* notata cu A^{-1} (pentru matricea initiala A), care se va prezenta ulterior.

---

3. Matrici deosebite

Fie de exemplu matrici de 3 linii si 3 coloane, adica matrici din $\mathcal{M}_3$

a) matricea nula. Pentru $\mathcal{M}_3$:

$$O_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

In general, matricea nula pentru $\mathcal{M}_n$, se noteaza cu O_n si este o matrice patrata, cu n linii si n coloane, avand toate elementele nule .

Matricea nula are proprietatea ca este neutra in raport cu adunarea matricelor, adica $A+O_n = O_n+A=A$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n$.

b) matricea unitate. Pentru $\mathcal{M}_3$:

$$I_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

In general, matricea unitate pentru $\mathcal{M}_n$, se noteaza cu I_n si este o matrice patrata, cu n linii si n coloane, avand toate elementele nule cu exceptia elementelor de pe diagonala principala care au toate valoarea 1.

Matricea unitate are proprietatea ca este neutra in raport cu inmultirea matricelor, adica $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n$.

Memo 21 Matricea inversa. Rangul unei matrici

1. Matricea inversa

Fie de exemplu matricea patrata de ordinul 3, A=$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Pentru a determina matricea inversa, notata cu A^{-1} se procedeaza astfel:

1. Se calculeaza determinantul matricii A.

a) Daca det(A)=0, inseamna ca nu exista matricea inversa A^{-1} , sau altfel spus, matricea A nu este inversabila. In aceasta situatie, precesul se opreste aici.

b) Daca det(A) diferit de zero, inseamna ca exista matricea inversa A^{-1} , sau altfel spus, matricea A este inversabila. Se continua cu pasul urmator.

2. Se formeaza matricea transpusa, notata cu A^t, si anume linia 1 din A devine coloana 1 din A^t, linia 2 din A devine coloana 2 din A^t , s.a.m.d. Deci se obtine:

$$A^t = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

3. Se formeaza matrice adjuncta (sau reciproca), notata cu A^*, **din $\mathbf{A^t}$**, care va avea tot atatea elemente ca si A^t, si va avea urmatoarea forma:

$$A^* = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

unde $x_{11}=(-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (e \cdot i - h \cdot f) = ei - hf =$ numar.

$x_{12}=(-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} = -1 \cdot (b \cdot i - h \cdot c) = -bi + hc =$ numar, samd.

Atentie: A nu se confunda cu metoda de dezvoltare a unui determinant, unde se folosea factorul generic $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Gamma_{ij}$ iar aici nu se foloseste a_{ij}

4. Se formeaza A^{-1} cu formula:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{det(A)} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_{11}}{det(A)} & \frac{x_{12}}{det(A)} & \frac{x_{13}}{det(A)} \\ \frac{x_{21}}{det(A)} & \frac{x_{22}}{det(A)} & \frac{x_{23}}{det(A)} \\ \frac{x_{31}}{det(A)} & \frac{x_{32}}{det(A)} & \frac{x_{33}}{det(A)} \end{vmatrix}$$

Se observa motivul pentru care la punctul 1 se concluziona ca nu exista A^{-1} daca se obtinea det(A)=0.

5. Pas optional, dar recomandabil daca este timp si anume verificarea lui A^{-1}. Se efectueaza inmultirea $A \cdot A^{-1}$ si se verifica daca intradevar se obtine matricea unitate, in cazul exemplului prezentat $I_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Pentru cazul general, daca se obtine I_n pentru o matrice patrata de ordinul n, inseamna ca A^{-1} a fost calculat corect, altfel inseamna ca s-a gresit si trebuie verificat calculul.

Mentiuni

1. Se observa ca daca se cere sa se verifice daca o matrice este inversabila (sau altfel spus daca exista matrice inversa), problema se reduce la verificarea determinantului matricii. Daca determinantul matricii este diferit de zero inseamna ca matricea este inversabila iar daca determinantul matricii este egal cu zero inseamna ca matricea nu este inversabila.

2. Problemele care folosesc matricea inversa sunt in general de tipurile urmatoare:

- Se da o matrice si se cere sa se determine matricea inversa.
- Se da o matrice si se cere sa se verifice daca matricea este inversabila.
- Rezolvarea ecuatiilor matriciale.
- Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare prin metoda matriciala.

---

2. Rangul unei matrici

Fie de exemplu urmatoarea matrice dreptunghiulara:

$$X = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$$

Prin definitie, rangul unei matrici reprezinta ordinul celui mai mare determinant patrat, diferit de zero, extras din matrice.

In cazul nostru, matricea fiind de tipul 3x4, ordinul maxim la care *putem spera* este 3x3. Extragem din matrice un determinant de ordin 3x3 , il calculam si verificam daca este diferit de zero. Daca este diferit de zero, atunci rangul matricii este 3 si ne oprim. Daca determinantuld este egal cu zero, alegem alt determinant de ordin 3x3 si procedam similar.

Daca toti determinantii de ordin 3x3 sunt egali cu zero, *cobaram din pretentii* si incercam cu determinanti de ordin 2x2 in mod similar.

Daca toti determinantii de ordin 2x2 sunt egali cu zero, *cobaram din pretentii* si incercam cu determinanti de ordin 1x1.

Se observa in *cel mai rau caz* vom gasi *macar* un determinant diferit de zero de ordinul 1, cu exceptia situatiei in care matricea are toate elementele nule, ceea ce ar insemna ca rangul ar fi egal cu zero. Din cele prezentate anterior se poate sesiza ca algoritmul este finit.

Mentiuni

1. Se observa ca metoda prezentata porneste de la o abordare a matricii de genul *de sus in jos*, in sensul ca se incepe cu determinantii patrati extrasi din matrice, de rang maxim.

2. Trebuie avuta atentie sa se ia toti determinantii de o anumita dimensiune, adica *sa nu se scape din vedere* unii determinanti.

3. Problemele care folosesc rangul unei matrici sunt in general de tipurile urmatoare:

- Se da o matrice si se cere sa i se determine rangul.
- Se da o matrice si se cere sa se discute rangul in functie de un parametru.
- Rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare.

---

1. Sisteme de ecuatii rezolvate matricial

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} x+y+z &= 7 \\ 3x+7y+5z &= 2 \\ 6x-3y+z &= 1 \end{cases}$

Rezolvarea matriciala a sistemului se face urmand urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se formeaza matricea coloana cu necunoscutele sistemului, X= $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

- Se formeaza matricea coloana cu termenii liberi ai sistemului, B= $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Sistemul este echivalent cu urmatoarea ecuatie matriciala:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

- Se rezolva ecuatia matriciala anterioara in mod obisnuit, adica se calculeaza A^{-1}, se inmulteste ecuatia matriciala la stanga cu A^{-1} si se obtine $X=A^{-1} \cdot B$. Se obtine matricea coloana X, de unde se scoate x,y,z.

Mentiune Aceasta metoda se foloseste rar, eventual doar daca se solicita in mod explicit prin enunt sa se rezolve prin aceasta metoda.

2. Regula lui Cramer

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} x+y+z &= 7 \\ 3x+7y+5z &= 2 \\ 6x-3y+z &= 1 \end{cases}$

Se efectueaza urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza determinantul matricii A, il notam de exemplu cu Δ (delta).

• Daca $\Delta = 0$, inseamna ca sistemul nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si procesul se opreste aici.

• Daca $\Delta \neq 0$, inseamna ca sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer si se continua cu etapa urmatoare.

- Se calculeaza Δ_x, prin inlocuirea coloanei cu coeficientii lui x din matricea sistemului, cu coloana termenilor liberi, adica se obtine: $\Delta_x = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 7 & 5 \\ \mathbf{1} & -3 & 1 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza Δ_y si Δ_z in mod similar.

- Se calculeaza $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ solutia sistemului fiind (x,y,z).

Se observa motivul pentru care un sistem avand $\Delta = 0$ nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si anume deoarece Δ apare la numitor.

3. Studiul compatibilitatii sistemelor

Fie de exemplu sistemul: $\begin{cases} 3x + y + 2z & = 8 \\ 2x - 3y + z & = 1 \\ 5x + 9y + 4z & = 22 \end{cases}$

Se efectueaza urmatorii pasi:

- Se formeaza matricea coeficientilor sistemului, in cazul nostru A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

- Se calculeaza determinantul matricii A, il notam de exemplu cu Δ (delta).

• Daca $\Delta \neq 0$, inseamna ca sistemul este **compatibil determinat**, se poate rezolva cu regula lui Cramer si nu este necesara prezenta metoda . Se rezolva cu regula lui Cramer prezentata anterior si procesul se opreste aici.

• Daca Δ =0 , inseamna ca sistemul nu se poate rezolva cu regula lui Cramer si efectuam pasii urmatori. In cazul nostru din calcul obtinem Δ =0.

- Se extrage din matricea sistemului, **un determinant patrat de cel mai mare ordin, diferit de zero** , numit **determinant principal**, pe care il notam de exemplu δ (delta mic).

De exemplu $\delta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$= -9-2=-11 $\neq 0$

- Se stabilesc **ecuatiile principale** , in acest caz ecuatia 1 si ecuatia 2 si **ecuatiile secundare** , in acest caz ecuatia 3. Se stabilesc **necunoscutele principale** , in acest caz x si y si **necunoscutele secundare** , in acest caz z.

- Se formeaza **determinantul caracteristic**, notat cu Δ_c, *prin bordarea determinantului principal δ cu o linie formata din coeficientii corespunzatori din* **una dintre** ecuatiile secundare si cu *o coloana formata din termenii liberi corespunzatori.* Pentru cazul nostru, se obtine Δ_c= $\begin{bmatrix} \mathit{3} & \mathit{1} & \mathbf{8} \\ \mathit{2} & -\mathit{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{22} \end{bmatrix}$

- Se calculeaza Δ_c, (in cazul nostru $\Delta_c = 0$) si se interpreteaza astfel:

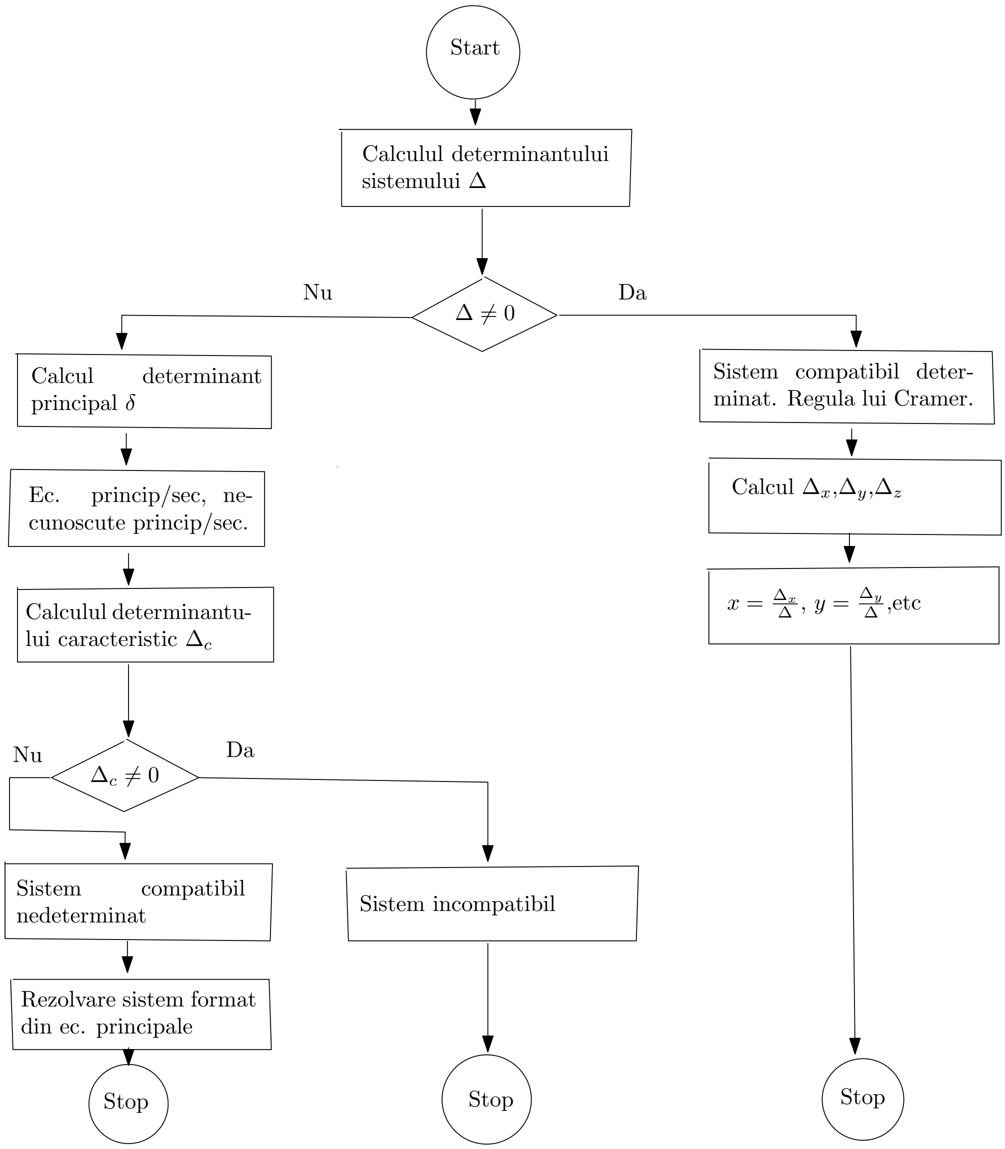
• Daca $\Delta_c \neq 0$ se trage concluzia ca sistemul este **incompatibil** si procesul se opreste aici.

• Daca $\Delta_c = 0$ se trage concluzia ca sistemul este **compatibil nedeterminat** (in cazul de fata, **sistem compatibil simplu nederminat** deoarece avem o singura necunoscuta secundara) si se continua cu pasul urmator:

- Se rezolva **sistemul format din ecuatiile principale si anume se scot necunoscutele principale in functie de necunoscutele secundare**. Practic se scrie sistemul format din ecuatiile secundare, se trec necunoscutele secundare in membrul cu termenii liberi si se scot necunoscutele principale in functie de necunoscutele secundare. In cazul nostru, se rezolva sistemul $\begin{cases} 3x + y & = 8 - 2z \\ 2x - 3y & = 1 - z \end{cases}$ prin metode obisnuite (metoda reducerii sau substitutiei sau chiar Cramer) si se scoate x=f(z) si y=f(z), z $\in$ R. Concret obtinem x=$\frac{25-7z}{11}$, y=$\frac{13-z}{11}$, z $\in$ R. Observam ca intradevar sistemul **este compatibil** (am putut obtine solutii pentru x si y) si **simplu nederminat**, deoarece x si y depind de un singur parametru real z.

Memo 23 Compatibilitatea sistemelor de ecuatii prezentata grafic

Reprezentare grafica a etapelor de analizare a compatibilitatii unui sistem cu n ecuatii si n necunoscute:



Se recomanda analizarea sistemelor dupa modelul acesta, eventual cu adaptarea ceruta de specificul problemei.

1. Discutarea naturii unui sistem dupa parametrii reali

Se urmeaza etapele prezentate in graficul studiului compatibilitatii si se trateaza pe cazuri, dupa valorile parametrilor. De exemplu daca avem un sistem de 3 ecuatii cu 3 necunoscute, cu un parametru m. Calculam determinantul sistemul si obtinem de exemplu $\Delta = (m-5)\cdot(m+7)$. Se procedeaza astfel:

Caz 1 Pentru $(m-5)\cdot(m+7)\neq 0$, adica pentru m$\neq$ 5 si m$\neq -7$ sistemul este compatibil determinat si se aplica regula lui Cramer. **Se scot efectiv in functie de m** Δ apoi $\Delta_x, \Delta_x, \Delta_x$ etc apoi x,y,z.

Caz 2 Pentru m=5 **se inlocuieste efectiv m=5** in sistemul initial, se obtine un sistem fara parametrii , care se rezolva absolut obisnuit ca orice sistem obisnuit fara parametrii. Bineintetes ca se va obtine $\Delta = 0$ si se va urma traseul corespunzator.

Caz 3 Pentru m=-7 **se inlocuieste efectiv m=-7** in sistemul initial, se obtine un sistem fara parametrii , care se rezolva absolut obisnuit ca orice sistem obisnuit fara parametrii. Bineintetes ca se va obtine $\Delta = 0$ si se va urma traseul corespunzator.

Daca se va obtine Δ_c in functie de parametru, (de exemplu$\Delta_c = m-9$) se va separa din nou pe cazuri, adica:

Caz a) Pentru $m-9\neq 0$ adica $m\neq 9$, sistemul este incompatibil si stop.

Caz a) Pentru $m-9=0$ adica $m=9$, sistemul este compatibil si nedeterminat si se continua conform grafic compatibilitate, prin rezolvarea sistemului format din ecuatiile principale.

Exemplu Discutati natura sistemului dupa valorile parametrului m si rezolvati sistemul :

$$\begin{cases} x-my+z &= 1\\ x-y+z &= 1\\ mx+m^2y-z &= m^2\end{cases}$$

2. Sisteme omogene

Sistem omogen este prin definitie un sistem care are toti termenii liberi egali cu zero.

Se pastreaza toate proprietatile si modul de lucru cunoscut de la sisteme, singura noutate fiind faptul ca un sistem omogen admite intotdeauna solutia x=y=z= $\cdots$ =0 numita **solutie banala** sau **solutie nula**.

Analizand graficul studiului compatibilitatii, se observa ca daca $\Delta\neq 0$ rezulta ca sistemul este compatibil determinat, adica admite solutie **unica**. Deoarece sistemul omogen admite intotdeauna solutia banala, inseamna ca pentru $\Delta\neq 0$, solutia banala este **unica solutie**. Prin urmare daca pentru un sistem omogen se cere sa se puna conditia ca sistemul **sa nu contina doar solutia banala**, trebuie pusa conditia ca $\Delta = 0$.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem omogen:

$$\begin{cases} x+2y+z+t &= 0 \\ 2x+y+z+2t &= 0 \\ x+2y+2z+t &= 0 \\ x+y+z+t &= 0 \end{cases}$$

---

3. Sisteme cu numar de ecuatii diferit de numarul de necunoscute

Poate aparea una dintre urmatoarele doua situatii:

a) Numarul de ecuatii este mai mic decat numarul de necunoscute.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem :

$$\begin{cases} x-2y+z+t &= 1 \\ x-2y+z-t &= -1 \\ x-2y+z+5t &= 6 \end{cases}$$

b) Numarul de ecuatii este mai mare decat numarul de necunoscute.

Exemplu Rezolvati urmatorul sistem :

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 6x-8y &= 1 \\ 5x+2y &= 3 \end{cases}$$

Se recomanda ca exercitiu, analizarea graficului de studiu al compatibilitatii sistemelor pentru fiecare din aceste situatii.

Ca recomandari generale:

• Pentru cazul a) sistemul chiar daca este compatibil nu poate fi si determinat, deoarece suntem in situatia in care avem mai putine ecuatii decat necunoscute.

• Pentru cazul b) avem mai multe ecuatii decat necunoscute, deci sistemul ar putea fi determinat, dar trebuie de verificate solutiile obtinute pentru toate ecuatiile pentru a fi sigur ca sistemul este compatibil.

Teorie

Se considera evidente urmatoarele:

a) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. In general, $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ pentru k > 0.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. In general $\lim_{n\to\infty} a^k = 0$ pentru a = subunitar .

c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$. In general, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pentru a = subunitar.

Tipuri de limite de siruri

Tip 1 = Fractii simple

Exemple:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^3+2n^2+3n+3}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^6+2n^2+3n+3}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2+5n+1}{4n^4+2n^2+3n+3}$

Idee: Se scoate factor fortat, atat la numitor cat si la numarator, **n** la puterea cea mai mare.

Tip 2 = Sume consacrate

Exemple:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots n}{3n^2+2n+1}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^3}{3n^2+2n+1}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n\cdot(n+1)}{4n^5+5}$

Idee: Se restrange suma conform regulilor cunoscute, dupa care problema devine de obicei de tipul 1.

Tip 3 = Radicali

Exemple:

a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n+5})$ b) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-3n)$ c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n+2})$

Idee: Se amplifica gruparea $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ cu $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ pentru a dispare radicalul de la numarator, unde se va obtine a-b, problema devenind de obicei de tipul 1. Similar, pentru gruparea $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, se amplifica cu $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

Tip 4 = Puteri

Exemple:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n+6\cdot 3^n}{5^n+3\cdot 2^n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 7^{n+3}+6\cdot 3^{n+1}}{7^{n+2}+4\cdot 3^{n+4}}$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n+6\cdot 6^n}{7^n+3\cdot 8^n}$

Idee: Se scoate factor fortat, atat la numitor cat si la numarator, puterea a^n la puterea cea mai mare, de exemplu pentru exemplul a), la numarator se scoate factor fortat 5^n iar la numarator tot 5^n.

Tip 5 = Gruparea gen $(1+\frac{1}{n})^n$. Nedeterminarea 1^∞

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n-2})^{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-5})^{n+2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+3}{n^2-n})^{2n+1}$

Idee: Se incearca sa se ajunga la formula $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, respectiv pentru cazul general, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+A)^{\frac{1}{A}} = e$, unde A $\to$0 pentru n$\to\infty$.

Tip 6 = Teorema cleste

Exemple:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot sin(n+7)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

Idee: Se foloseste **teorema cleste**:

Fie un sir a_n si o limita l. Daca $b_n <= a_n <= c_n$ si atat sirul $b_n\to l$ cat si $c_n\to l$, atunci $a_n\to l$. Daca l=0, regula se mai numeste **criteriul majorarii**.

Teorie

Se considera cunoscute urmatoarele:

a) Modul de calcul al limitelor de siruri

b) Descompunerea $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ si similar pentru orice polinom de gradul n.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 1$

Limitele de functii se pot calcula prin doua mari metode: clasic, adica fara a utiliza derivate si folosind metoda lui l'Hôpital care implica folosirea derivatelor. Unele probleme se rezolva mai usor prin o metoda, alte probleme prin cealalta. Nu exista o reteta care sa indice care e cea mai potrivita metoda pentru o anumita problema.

A) Tipuri de limite de functii clasice

(fara a folosi derivate)

Tip 1 = Limite cu $x \to \pm\infty$

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+4x^2+2x+1}{3x^2+2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+3}{x-5})^{2x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+3x}{2x+1}$

Idee: Se lucreaza asemanator cu limitele de siruri, unde aveam $n \to \pm\infty$.

Tip 2 = Limite cu $x \to x_0$ si $x - x_0$ apare la numitor

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{-3(x^2+2)}{x-7}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{5+\frac{-6}{x-3}}$

Idee: Se face tabel si la final se obtine limita la stanga lui x_0 si limita la dreapta lui x_0.

Tip 3 = Limite din fractii de polinoame

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$

Idee: Se incearca sa se descompuna atat numaratorul cat si numitorul dupa formula de genul $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ (corespunzator gradului polinomului), sau eventual dupa alte formule, dupa care se incearca simplificarea factorului $x - x_0$.

Tip 4 = Limite de functii trigonometrice

Exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(7x)}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(3x)}{tg(7x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{sin(x-3)}{4(x-3)}$

Idee: Se foloseste formula $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin(x)}{x} = 1$ si formulele obisnuite de la trigonometrie. De avut in vedere ca sin(0)=0 si cos(0)=1.

Metodele prezentate anterior fac parte din categoria de **calcul limite de functii prin metoda clasica** in sensul ca **nu** utilizeaza derivate. Limitele de functii se pot calcula si cu utilizarea derivatelor, folosind regula lui l'Hôpital, prezentata in continuare.

B) Teorema lui l'Hôpital

Limite de functii cu folosirea derivatelor

Calculul limitelor de functii se poate **uneori** simplifica prin utilizarea teoremei lui l'Hôpital.

Teorema lui l'Hôpital: Pentru nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ este adevarata relatia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Cazuri particulare In cazul in care nedeterminarea nu este de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, expresia data trebuie transformata in una din aceste forme. Astfel se procedeaza daca avem nedeterminari de tipul:

1. $[0 \cdot \infty]$
2. $[\infty - \infty]$
3. $[1^{\infty}, \infty^{0}, etc]$ in general nedeterminari de forma f^{g}

Uneori este mai simplu de calculat o limita de functie prin l'Hôpital, alteori este mai simplu prin metode clasice (clasic adica fara derivate, adica fara l'Hôpital). **Nu exista o reteta** care sa recomande pentru o expresie oarecare daca e mai usor cu o metoda sau alta.

Pentru nederminari diferite de $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, se procedeaza astfel:

1. Pentru nedeterminare $[0 \cdot \infty]$

Fie de calculat $\lim\limits_{x \to x_0} f \cdot g$, unde $f \to 0$ si $g \to \infty$.

Se **rastoarna** una dintre functii, de exemplu:

$f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ si acum se poate aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{g}{\frac{1}{f}} \quad [\frac{\infty}{\infty}] \quad = \lim_{x \to x_0} \frac{g'}{(\frac{1}{f})'}$$

2. Pentru nedeterminare $[\infty - \infty]$

Fie de calculat $\lim\limits_{x \to x_0} (f - g)$, unde $f \to \infty$ si $g \to \infty$.

Se transforma astfel:

$f - g = f \cdot g \frac{(f-g)}{f \cdot g} = f \cdot g \cdot (\frac{f}{fg} - \frac{g}{fg}) = f \cdot g \cdot (\frac{1}{g} - \frac{1}{f}) = [\infty \cdot 0] = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} = [\infty \cdot \infty]$
si acum se poate aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0} (f - g) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} = \lim_{x \to x_0} \frac{(\frac{1}{g} - \frac{1}{f})'}{(\frac{1}{f \cdot g})'}$$

3. Pentru nedeterminari de tipul f^{g}. De exemplu 1^{∞}, ∞^{0}, etc.

Se foloseste formula $A = e^{ln(A)}$, si se ia A=f^{g}.

Memo 27 Aplicatii ale limitelor de functii

Continuitate, Derivate, Derivabilitate, Asimptote

1. Functii continue

Orice functie elementara este continua pe interval.
Studiul continuitatii se pune in puncte, de exemplu in punctul $x = x_0$. Se procedeaza astfel:

1. - Se calculeaza limita la stanga in x_0, $l_s|_{x=x_0} = lim_{x\to x_0(x<x_0)} f(x)$
2. - Se calculeaza limita la dreapta in x_0, $l_d|_{x=x_0} = lim_{x\to x_0(x>x_0)} f(x)$
3. - Se calculeaza valoarea functiei in punctul x_0, adica $f(x_0)$
4. - Daca limita la stanga in x_0 este egala cu limita la dreapta in x_0 si este egala cu $f(x_0)$, atunci functia f(x) este continua in punctul x_0, altfel f(x) nu este continua in punctul x_0.

Pe scurt, conditia de continuitate intr-un punct x_0 este ca

$$l_s|_{x=x_0} = l_d|_{x=x_0} = f(x_0)$$

Deoarece studiul continuitatii se face in puncte, problemele de continuitate apar la probleme la care f(x) se da sub forma de *acolada*, studiul efectuandu-se in punctele in care functia isi schimba forma.

2. Definitia derivatei

Derivata functiei f(x) in punctul x_0 se noteaza cu $f(x)'_{x=x_0}$ si se defineste astfel:

$$f(x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Prin aplicarea formulei anterioare asupra functiile cunoscute, s-a obtinut tabelul de derivare.

3. Functii derivabile

Functiile elementare sunt derivabile pe intervale.
Studiul derivabilitatii se pune in puncte, de exemplu in punctul $x = x_0$. Se procedeaza astfel:

Functia f(x) este derivabila in punctul $x = x_0$, daca derivata la stanga in x_0 si derivata la dreapta in x_0 sunt **egale si finite**.

a) Derivata la stanga in punctul x_0 se noteaza cu $f' s_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)'_s(x = x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)'_s(x = x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f'(x)$$

b) Derivata la dreapta in punctul x_0 se noteaza cu $f' d_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)'_s(x = x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)_d^{'}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f^{'}(x)$$

In concluzie, se calculeaza derivata la stanga punctului x_0 si derivata la dreapta lui x_0 . Daca aceste doua sunt **egale si finite**, atunci functia f(x) este derivabila in punctul x_0, altfel f(x) nu este derivabila in punctul x_0.

Deoarece studiul derivabilitatii se face in puncte, problemele de derivabilitate apar la probleme la care f(x) se da sub forma de *acolada*, studiul efectuandu-se in punctele in care functia isi schimba forma.

---

4. Asimptote

Pot exista trei tipuri de asimptote:
• **Asimptota orizontala** Se numeste asimptota orizontala la $+\infty$, o dreapta *orizontala* y=a, daca $lim_{x\to+\infty}$ f(x) = a

Similar, se numeste asimptota orizontala la $-\infty$, o dreapta *orizontala* y=b, daca $lim_{x\to-\infty}$ f(x) = b
Daca $+\infty$ nu face parte din domeniul de definitie, atunci sigur nu avem asimptota orizontala la $+\infty$. Similar pentru $-\infty$.
• **Asimptota verticala** Este o dreapta *verticala* x=c, daca $lim_{x\to c}$ f(x) = $+-\infty$
• **Asimptota oblica** Studiu la $+\infty$:

Daca $+\infty$ nu face parte din domeniul de definitie, atunci sigur nu avem asimptota oblica la $+\infty$. Daca $+\infty$ face parte din domeniul de definitie dar am stabilit deja ca avem asimptota orizontala la $+\infty$ atunci sigur nu avem asimptota oblica la $+\infty$, deoarece functia nu poate avea simultan doua asimptote $+\infty$. Daca $+\infty$ apartine domeniului de definitie si $lim_{x\to+\infty}$ f(x) = $+-\infty$ inseamna ca la $+\infty$ nu avem asimptota orizontala. In acest caz se verifica *daca eventual exista* asimptota oblica la $+\infty$. Se calculeaza $m = lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ Daca obtinem *m finit* , se continua cu calcularea lui $n = lim_{x\to+\infty}(f(x) - m\cdot x)$ Daca si n este finit, putem concluziona ca exista asimptota oblica la $+\infty$ si anume dreapta *oblica* $y = m\cdot x + n$.

Se studiaza in mod similar existenta asimptotei oblice la $-\infty$.

Practic se procedeaza astfel:
1. Se stabileste domeniul de definitie, care se scrie ca reuniune de intervale.
2. Se calculeaza valorile functiei, respectiv limitele functiei *la capetele domeniului de definitie.*
3. Se stabilesc asimptotele analizand valorile functiei, respectiv valorile limitelor obtinute si definitiile asimptotelor, prezentate anterior. Se observa ca asimptotele orizontale si cele oblice pot apare la + ∞ sau la - ∞, iar asimptotele verticale pot apare la capete de intervale diferite de +- ∞. Unele functii au asimptote, iar altele nu.

---

1. Definitia derivatei

Derivata functiei f(x) in punctul x_0 se noteaza cu $f(x)'_{x=x_0}$ si se defineste astfel:

$$f(x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3. Operatii cu derivate

$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$

$(f-g)^{'} = f^{'} - g^{'}$

$(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'}$

$(k \cdot f)^{'} = k \cdot f^{'}$, unde k=constanta

$(\frac{f}{g})' = \frac{f^{'} \cdot g - f \cdot g^{'}}{g^2}$

- Avansat $(f^g)^{'} = f^g \cdot (g^{'} \cdot ln(f) + g \cdot \frac{f^{'}}{f})$
- Derivarea functiilor compuse: $f(u(v(x)))^{'} = f^{'}(u(v(x)) \cdot u^{'}(v(x)) \cdot v^{'}(x) \cdot x^{'}$

4. Functii derivabile

Functia f(x) este derivabila in punctul $x = x_0$, daca derivata la stanga in x_0 si derivata la dreapta in x_0 sunt **egale si finite**.

a) Derivata la stanga in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}s_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f^{'}(x)$$

b) Derivata la dreapta in punctul x_0 se noteaza cu $f^{'}d_{(x=x_0)}$ si se calculeaza cu formula de definitie a derivatei:

$$f(x)^{'}_{s}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se poate calcula cu regula lui l'Hôpital deoarece exista nedeterminare $\frac{0}{0}$ si se obtine

$$f(x)^{'}_{d}(x = x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f^{'}(x)$$

In concluzie, se calculeaza derivata la stanga punctului x_0 si derivata la dreapta lui x_0 . Daca aceste doua sunt **egale si finite**, atunci functia f(x) este derivabila in punctul x_0, altfel f(x) nu este derivabila in punctul x_0.

5. Principalele aplicatii ale derivatelor

- Teorema lui l'Hôpital
- Teorema lui Lagrange
- Teorema lui Rolle, Teorema lui Cauchy
- Functii concave , convexe
- Reprezentarea grafica a functiilor

Memo 29 Aplicatii ale derivatelor

Teoremele lui l'Hôpital, Rolle, Lagrange, Cauchy
Monotonie, Concavitate/Convexitate, Grafice de functii

---

1. Teorema lui l'Hôpital

Calculul limitelor de functii se poate **uneori** simplifica prin utilizarea teoremei lui l'Hôpital.

Teorema lui l'Hôpital: Pentru nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ este adevarata relatia:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Cazuri particulare In cazul in care nedeterminarea nu este de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, expresia data trebuie transformata in una din aceste forme. Astfel se procedeaza daca avem nedeterminari de tipul:

1. $[0 \cdot \infty]$

2. $[\infty - \infty]$

3. $[1^\infty, \infty^0, etc]$ in general nedeterminari de forma f^g

Uneori este mai simplu de calculat o limita de functie prin l'Hôpital, alteori este mai simplu prin metode clasice (clasic adica fara derivate, adica fara l'Hôpital). Nu exista o reteta care sa recomande pentru o expresie oarecare daca e mai usor cu o metoda sau alta.

---

2. Teorema lui Rolle

Fie o functie f(x), un interval I si doua numere a,b, unde a $<$ b si a,b $\in$ I.

Daca :

1. Functia f(x) este continua pentru x $\in$ [a,b]
2. Functia f(x) este derivabila pentru x $\in$ (a,b)
3. f(a)=f(b)

atunci exista cel putin un punct **c** intre a si b, astfel incat **f'(c)=0**.

---

3. Teorema lui Lagrange

Fie o functie f(x), un interval I si doua numere a,b, unde a $<$ b si a,b $\in$ I.

Daca :

1. Functia f(x) este continua pentru orice x $\in$ [a,b]
2. Functia f(x) este derivabila pentru orice x $\in$ (a,b)

atunci exista un punct **c** intre a si b, astfel incat:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Consecinte alte teoremei lui Lagrange:

1. Daca f'(x) $>$ 0 pe un interval, atunci f(x) este **crescatoare** pe acel interval

2. Daca f'(x) $<$ 0 pe un interval, atunci f(x) este **descrescatoare** pe acel interval

3. Daca f'(x) = 0 pe un interval, atunci f(x) este **constanta** pe acel interval

Mentiuni:
a) Puncte de extrem: Prin studiul semnului lui f'(x) se poate analiza monotonia functiei f(x) (crescatoare / descrescatoare) si pe baza monotoniei se pot stabili punctele de extrem ale functiei (minim respectiv maxim).
b) Avansat: Interpretarea geometrica a teoremei lui Lagrange.

---

4. Teorema lui Cauchy

Fie functiile f(x) si g(x), un interval I si doua numere a,b, cu a<b si a,b $\in$ I.

Daca :

1. Functiile f(x) si g(x) sunt continue pentru x $\in$ [a,b]
2. Functiile f(x) si g(x) sunt derivabile pentru x $\in$ (a,b)
3. Functia g'(x) $\neq$ 0pentru x $\in$ (a,b)

atunci exista un punct **c** intre a si b, astfel incat:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Se observa ca pentru cazul particular g(x)=x, se obtine teorema lui Lagrange.

---

5. Concavitate, convexitate

Notiuni noi :

- Functie convexa, functie concava.

- Punct de inflexiune, punct de intoarcere.

Teorie:
1. Daca f"(x) $>$ 0 , atunci f(x)= **convexa** pe acel interval.
2. Daca f"(x) $<$ 0 , atunci f(x)= **concava** pe acel interval.

---

6. Reprezentarea grafica a functiilor

1. Determinarea domeniului de definitie, scris ca reuniuni de intervale

2. Calcul valori functie(limite functie) la capetele domeniului de definitie

3. Determinare asimptote

4. Intersectie cu axa Ox (se face y=0 si se scoate x)

5. Intersectie cu axa Oy (se face x=0 si se scoate y)

6. Derivata intai : f'=0, rezolvare ecuatie, tabel, monotonie, puncte extrem

7. Derivata a doua:f"=0, rezolvare ecuatie, tabel, concavitate/convexitate

8. Tabel general

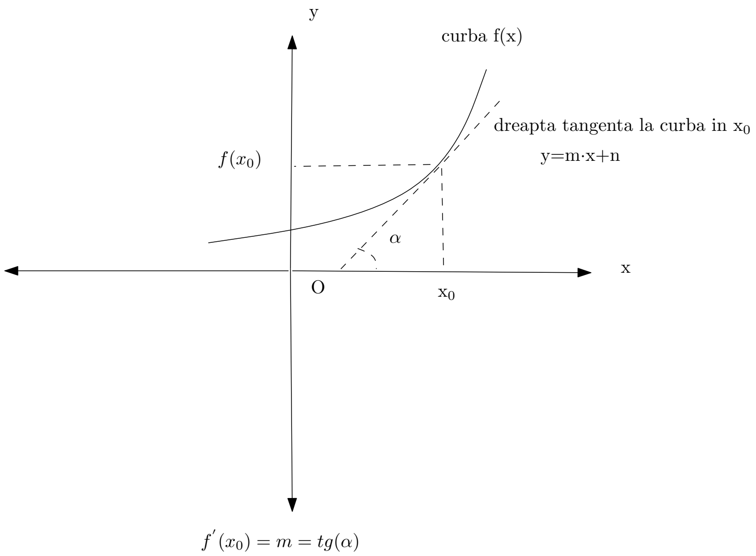
9. Trasare grafic

Interpretarea geometrica a derivatei:

• Se reaminteste ca derivata unei functii f(x) intr-un punct x_0 este prin definitie:

$$f^{'}(x)_{x=x_0} = f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

• Derivata unei functii f(x) in punctul x_0, notata cu $f^{'}(x_0)$, semnifica **panta dreptei tangente la curba f(x) in punctul x_0,**, unde panta unei drepte reprezenta tangenta unghiului facut de acea dreapta cu axa Ox. Interpretarea geometrica a derivatei reprezentata grafic:



Utile pentru exercitii

Se considera cunoscute urmatoarele:

1. Ecuatia unei drepte care trece printr-un punct (x_0, y_0) si are panta m, este:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

2. Panta **m** a unei drepte de forma $y = m \cdot x + n$, reprezinta tangenta unghiului facut de dreapta cu axa Ox, deci m=tg(α), unde α reprezinta unghiului facut de dreapta cu axa Ox.

3. Conditia ca doua drepte $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ si $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sa fie paralalele este ca dreptele sa aiba pante egale, adica $m_1 = m_2$.

4. Conditia ca doua drepte $y_1 = m_1 \cdot x + n_1$ si $y_2 = m_2 \cdot x + n_2$ sa fie perpendiculare este ca $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Exercitii

1. Scrieti ecuatia tangentei la curba f(x)=ln(x)+x^2-1 in punctul (e,e^2).

2. Determinati un punct pe curba y=$\frac{x-1}{x+1}$, x$\neq -1$, in care tangenta sa fie paralele cu dreapta y=$\frac{x}{2}$.

3. Determinati constantele α si β, astfel incat curbele de ecuatii:

$$y_1 = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2 \quad si \quad y_2 = \frac{x-a}{x}, x \neq 0$$

sa fie tangente in punctul x=1.

4. Scrieti ecuatia normalei la parabola $y = x^2 - 4x + 5$ in punctele de intersectie ale acesteia cu dreapta x-y+1=0.

1. Notiunea de integrala

Integrala functiei f(x) se noteaza cu $\int f(x) \cdot dx$. Notatia $\int$ reprezinta un S *lungit* , litera S provenind de la cuvantul Suprafata. Se va vedea in continuare ca una dintre cele mai importante aplicatii ale integralelor este calculul de suprafete.

2. Tabel integrale

$\int x^n \cdot dx$	$=$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int a^x \cdot dx$	$=$	$\frac{a^x}{ln(a)} + C$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx$	$=$	$ln\|x\| + C$
$\int \frac{1}{x+a} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+a\| + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx$	$=$	$\frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln\|\frac{x-a}{x+a}\| + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx$	$=$	$\frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+\sqrt{x^2+a^2}\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx$	$=$	$ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx$	$=$	$arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int sin(x) \cdot dx$	$=$	$-cos(x) + C$
$\int cos(x) \cdot dx$	$=$	$sin(x) + C$
$\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx$	$=$	$tg(x) + C$
$\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx$	$=$	$-ctg(x) + C$
$\int tg(x) \cdot dx$	$=$	$-ln\|cos(x)\| + C$
$\int ctg(x) \cdot dx$	$=$	$ln\|sin(x)\| + C$

3. Metode de calcul integrale

1) Metoda substitutiei: implica **retete de rezolvare**
2) Metoda integrarii prin parti:

$$\int f \cdot g' \cdot dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \cdot dx$$

4. Integrale definite. Formula lui Leibnitz-Newton

- Fie F(x) primitiva functiei f(x), adica $\int f(x) \cdot dx = F(x)$
- Formula lui Leibnitz-Newton:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

5. Integrale definite. Metoda integrarii prin parti

$$\int_a^b f \cdot g^{'} \cdot dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f^{'} \cdot g \cdot dx$$

6. Operatii cu integrale

$\int (f+g) \cdot dx = \int f \cdot dx + \int g \cdot dx$

$\int (f-g) \cdot dx = \int f \cdot dx - \int g \cdot dx$

$\int k \cdot f \cdot dx = k \cdot \int f \cdot dx$, unde k= constanta

Formulele anterioare sunt valabile atat pentru integrale nedefinite cat si pentru integrale definite.

7. Subtilitati privind integralele

- Sume Rieman, aplicatii la calcul de limite de siruri
- Sume Darboux
- Functii integrabile

8. Aplicatii ale integralelor definite

Fie o functie f(x), sistemul cartezian XOY, o dreapta x=a si o dreapta x=b

- Fie S = suprafata curbei marginite de f(x), x=a, x=b si Ox

$$S = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

- Fie V = volumul corpului obtinut prin rotirea curbei marginite de f(x), x=a, x=b in jurul axei Ox.

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

- Fie l_c = lungimea curbei f(x) , intre x=a si x=b

$$l_c = \int_a^b \sqrt{1 + f^2(x)} \cdot dx$$

- Fie A = aria laterala a corpului obtinut prin rotirea curbei marginite de f(x), x=a, x=b in jurul axei Ox.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f^{'})^2} \cdot dx$$

- Fie $G(x_g, y_g)$ centrul de greutate al placii marginite de f(x), x=a, x=b, Ox. Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_g = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx} \qquad y_g = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b x \cdot f^2(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

1. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabel integrale

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} \cdot dx = ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx = ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int sin(x) \cdot dx = -cos(x) + C$$

$$\int cos(x) \cdot dx = sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx = tg(x) + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx = -ctg(x) + C$$

$$\int tg(x) \cdot dx = -ln|cos(x)| + C$$

$$\int ctg(x) \cdot dx = ln|sin(x)| + C$$

Memo 33 Tabel derivate si Tabel integrale pe o pagina

1. Tabel derivate

Functia	Derivata
k(=constanta)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot ln(a)$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos(x)^2}$
$ctg(x)$	$-\frac{1}{sin(x)^2}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Tabel integrale

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$
$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = ln|x| + C$$
$$\int \frac{1}{x+a} \cdot dx = ln|x+a| + C$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2\cdot a} \cdot ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx = ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot dx = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int sin(x) \cdot dx = -cos(x) + C$$
$$\int cos(x) \cdot dx = sin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{cos^2(x)} \cdot dx = tg(x) + C$$
$$\int \frac{1}{sin^2(x)} \cdot dx = -ctg(x) + C$$
$$\int tg(x) \cdot dx = -ln|cos(x)| + C$$
$$\int ctg(x) \cdot dx = ln|sin(x)| + C$$

Grup

Fie o multime A nevida si o operatie $*$

De exemplu A=R si $*$: R x R $->$ R, unde x$*$y=x+y-xy

(A,$*$) este **grup** daca sunt indeplinite conditiile de parte stabila, asociativitate, element neutru, element simetric. Daca in plus este indeplinita si comutativitatea, grupul se numeste grup comutativ sau grup abelian.

1. Parte stabila :

Pentru orice x $\in$ A si x $\in$ A $\to$ x$*$y $\in$ A

2. Asociativitate :

Pentru orice x,y,z $\in$ A , avem x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

3. Element neutru :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element e $\in$ A astfel incat x$*$e=e$*$x=x

4. Element simetric :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element x' $\in$ A astfel incat x$*$x'=x'$*$x=e

5. Comutativitate :

Pentru orice x,y $\in$ A , x$*$y=y$*$x

Exemple de grupuri:

a) (R,+) Element neutru e=0. Simetric de exemplu pt x=7, este x'=-7

b) (R,.) Element neutru e=1. Simetric de exemplu pt x=7, este x'=$\frac{1}{7}$

Monoid

Fie o multime A nevida si o operatie $*$

(A,$*$) este **monoid** daca sunt indeplinite conditiile de asociativitate si element neutru, adica:

1. Asociativitate :

Pentru orice x,y,z $\in$ A , avem x$*$(y$*$z)=(x$*$y)$*$z

2. Element neutru :

Pentru orice x $\in$ A , exista un element e $\in$ A astfel incat x$*$e=e$*$x=x

Inel

Fie o multime A nevida si doua operatii $*$ si $\circ$

(A,$*$,$\circ$) este **inel** daca sunt indeplinite conditiile:

1. (A,$*$) este grup abelian, adica

(A,$*$) = parte stabila

(A,$*$) = asociativitate

(A,$*$) = element neutru

(A,$*$) = element simetric

(A,$*$) = comutativitate

2. (A,$\circ$) este monoid, adica

(A,$\circ$) = asociativitate

(A,$\circ$) = element neutru

3. Operatie $\circ$ (cea cu monoidul) **este distributiva fata de** $*$(cea cu grupul) **atat la stanga cat si la dreapta**, adica:

a) x$\circ$(y$*$z)=(x$\circ$y)$*$(x$\circ$z) (distributivitatea lui $\circ$ la stanga fata de $*$)

b) (y$*$z)$\circ$x=(y$\circ$x)$*$(z$\circ$x) (distributivitatea lui $\circ$ la dreapta fata de $*$)

Exemplu de inel:

(R,+,$\cdot$) Adunarea este pe rol de $*$ iar inmultirea este pe rol de $\circ$. Se observa ca sunt verificare conditiile de distributivitate ale inmultirii fata de adunare:

a) x$\cdot$(y+z)=(x$\cdot$y)+(x$\cdot$z) (distributivitatea inmultirii la stanga fata de adunare)

b) (y+z)$\cdot$x=(y$\cdot$x)+(z$\cdot$x) (distributivitatea inmultirii la dreapta fata de adunare)

Mentiuni

1. Se numeste **inel comutativ**, un inel in care operatia $\circ$ este comutativa.

2. Se numeste **corp**, un inel in care orice element diferit de elementul neutru al lui $*$(cea cu grupul) este inversabil. Daca operatia $\circ$(cea cu monoidul) este comutativa, atunci corpul se numeste **corp comutativ**

Izomorfism

Fie (A,$*$), (A,$\circ$) si o functie f:A$\times$A$\rightarrow$ A

1. Se spune ca avem un **morfism** de la (A,$*$) la (A,$\circ$) prin functia f(x), daca este indeplininta relatia:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

2. Daca in plus functia f(x) este bijectiva, se spune ca avem **izomorfism**. Deci **izomorfism=morfism + f(x) bijectiva**

Se reaminteste ca o functie este bijectiva, daca este atat injectiva cat si surjectiva.

Capitole necontinute in lucrare:

Scopul lucrarii a fost sintetizarea principalelor instrumente de lucru din matematica de liceu.

Principalul obiectiv a fost ca lucrarea sa fie scurta,
din acest motiv nu s-au tratat decat subiectele considerate strict necesare.

Nu au fost incluse capitole care indeplinesc una din urmatoarele caracteristici: unele sunt prea usoare si se considera deja stiute, altele au fost deja tratate in gimnaziu, unele se folosesc mai rar, altele sunt prea dificile, unele nu sunt cerute de programa de examene, respectiv apar foarte rar sau deloc in subiectele de examene, s.a.m.d.

Astfel de capitole netratate in lucrare sunt urmatoarele:

1.	Geometrie plana in detaliu	Geometrie	IX
2.	Vectori	Geometrie	IX
3.	Geometrie in spatiu	Geometrie	IX
4.	Geometrie analitica (dreapta, cercul, elipsa, hiperbola, parabola)	Geometrie	XI
5.	Functii trigonometrice inverse	Trigonometrie	X
6.	Aplicatiile trigonometriei in geometrie	Trigonometrie	X
7.	Modulul. Partea intreaga	Algebra	IX
8.	Functia de gradul intai	Algebra	IX
9.	Functii compuse, inversa unei functii	Algebra	IX
10.	Discutia naturii si semnului ecuatiei de gradul doi	Algebra	IX
11.	Pozitia radacinilor ecuatiei de gradul doi	Algebra	IX
12.	Sisteme de ecuatii neliniare: omogene, simetrice	Algebra	IX
13.	Inductia matematica	Algebra	IX
14.	Cardinalul unei multimi. Probleme de numarare	Algebra	X
15.	Probabilitati	Algebra	X
16.	Matematici financiare: dobanzi, tva, statistica	Algebra	X
17.	Permutari	Algebra	XI
18.	Siruri: Teorema de convergenta cu epsilon	Analiza	XI
19.	Siruri: Siruri recurente	Analiza	XI
20.	Siruri: Teorema lui Stolz-Cesaro	Analiza	XI
21.	Continuitate: Vecinatati	Analiza	XI
22.	Aplicatii ale teoremei lui Lagrange	Analiza	XI
23.	Grafice de functii in detaliu	Analiza	XI

24.	Formula lui Taylor	Analiza	XI
25.	Rezolvarea ecuatiilor cu sirul lui Rolle.	Analiza	XI
26.	Aproximarea radacinilor ecuatiilor.	Analiza	XI
27.	Clase de resturi	Algebra	XII
28.	Morfisme si izomorfisme	Algebra	XII
29.	Functii integrabile	Analiza	XII
30.	Metode de integrare pentru functii rationale, functii trigonometrice, integrare prin parti in detaliu, formulele lui Euler, substitutiile lui Cebisev, etc.	Analiza	XII
31.	Sume Riemann, sume Darboux, calcul de limite de siruri cu ajutorul integralelor	Analiza	XII
32.	Aplicatiile calculului integral in geometrie detaliat	Analiza	XII

Pentru realizare unei instruiri aprofundate este necesara si studierea acestor capitole din carti adecvate, de exemplu culegerea de Lia Arama pentru Calcul diferential si integral, culegerea de Chiriac pentru Algebra, culegerea de Turtoiu pentru Trigonometrie, din manual pentru vectori si geometrie analitica. Eventual din manualele scolare sau alte surse.

Aceste subiecte netratate din fericire contin in general **concepte compuse** care se bazeaza pe subiectele tratate. Din acest motiv, nefiind notiuni de baza ci notiuni compuse se pot invata de sine statator, in mod izolat, dupa stapanirea cunostintelor de baza. De asemenea apar mai rar in alte probleme decat subiectele de baza.

PARTEA a II-a

FIŞE MATEMATICĂ

- EXERCIŢII -

Fila 1 = Geometrie plana

Lectia 1

1) Un patrulater are masurile a trei unghiuri de 45, 70 si 100 grade.

Cate grade are al patrulea unghi?

2) ABD si BCD sunt triunghiuri dreptunghice isoscele cu ipotenuza BD. Aflati masura unghiurilor patrulaterului ABCD.

3) La patrulaterul BCDA cunoastem m(< ADC)= m(<ABC)=80 si m(<DAB)=100 grade.

Ce fel de patrulater este BCDA ?

4) La paralelogramul ABMP avem m(<BAP)=50. Calculati masura unghiurilor acestui paralelogram.

5) ABC este un triunghi, M si N mijloacele laturilor AB respectiv AC, AB=8cm, MN=6cm, iar perimetrul triunghiului ABC este de 30 cm.

Aflati masurile laturilor BC si AC.

6) ABCD este un patrulater la care m(<BAC)=m(<BDC)=90 grade. Punctul O este mijlocul laturii BC. Calculati perimetrul triunghiului AOD stiind ca AD=5cm si BC=8cm.

Fila 2 = Geometrie in spatiu

Formule

1) Cubul = simplu

2) Paralelipipedul dreptunghic = simplu

3) Prisma

Sl=$P \cdot I$, unde Sl=suprafata laterala, P=perimetrul bazei, I=inaltimea

St=Sl+2$\cdot Sb$, unde St=suprafata totala, Sb=suprafata bazei

V=Sb $\cdot I$, unde V=volumul

4) Piramida regulata

Sl=$\frac{P \cdot A}{2}$, unde Sl=suprafata laterala, P=perimetrul bazei, A=apotema

St=Sl+Sb, unde St=suprafata totala, Sb=suprafata bazei

V=$\frac{Sb \cdot I}{3}$, unde V=volumul, Sb=suprafata bazei, I=inaltimea

5) Trunchiul de piramida

Fie P=perimetrul bazei mari, p=perimetrul bazei mici, A=apotema , I=inaltimea,

B=suprafata bazei mari, b=suprafata bazei mici

Sl=$\frac{(P+p) \cdot A}{2}$

St=Sl+B+b

V=$\frac{I \cdot (B+b+\sqrt{B \cdot b})}{3}$

6) Cilindrul circular drept

Fie R=raza bazei, G=generatoarea, I=inaltimea

Sl=$2\pi RG$

St=$2\pi R(R+G)$

V=$\pi R^2 I$

7) Conul circular drept

Sl=πRG

St=$\pi R(R+G)$

V=$\frac{\pi R^2 I}{3}$

8) Trunchiul de con

Fie G=generatoarea, R=raza bazei mari, r=raza bazei mici, I=inaltimea

Sl=$\pi G(R+r)$

St=Sl+$\pi(R^2+r^2)$

V=$\frac{\pi \cdot I \cdot (R^2+r^2+Rr)}{3}$

9) Sfera

Fie R=raza sferei, S=suprafata sferei, V=volumul sferei

S=$4\pi R^2$

V=$\frac{4\pi R^3}{3}$

10) Zona sferica

Fie S=suprafata zonei sferice, R=raza sferei din care provine zona sferica, I=distanta

dintre cele doua plane paralele care sectioneaza sfera si determina zona sferica(inaltimea zonei sferice)

S=$2\pi RI$

11) Calota sferica

Fie S=suprafata calotei sferice, R=raza sferei din care provine calota sferica, I=distanta dintre cele planul care sectioneaza sfera si punctual de pe sfera(inaltimea calotei)

S=$2\pi RI$

12) Sectorul sferic

Fie S=suprafata sector sferic, V=volumul, R=raza sferei din care provine sectorul sferic, I=similar cu I de la calota sferica.

S=$2\pi RI + \pi Rr$

V=$\frac{2\pi R^2 I}{3}$

13) Notiunea de unghi diedru

14) Teorema celor 3 perpendiculare

15) Notiuni de clasa XII

S=$\int_a^b |f(x)|dx$, unde S=suprafata marginita de x=a, x=b si f(x)

V=$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ unde V= volumul marginit de x=a, x=b, generat de rotirea lui f(x) in jurul axei Ox

Al=$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f')^2 dx}$ unde Al=aria laterala determinata de rotirea lui f(x) in jurul axei Ox, marginita de x=a si x=b

16) Reamintire extragere radicali

$\sqrt{53824}$ |232

```
4       2 x 2=4  43 x3=129
138     23x 2=46 462x2=924
129
  924
  924
```

Fila 3 = Trigonometrie

Lectia 1

1) Scrieti valorile sin(a), cos(a), tg(a), ctg(a) pentru a= 30, 60, 45 grade.

2) Completati tabelul urmator, utilizand cercul trigonometric:

Functia:	0	90	180	270
Sin				
Cos				
Tg				
Ctg				

3) Enuntati si demonstrati formula fundamentala a trigonometriei
4) Considerand cunoscute formulele:

sin(a+b)=sin(a) cos(b) + cos(a) sin(b) ($1)

sin(a-b)=sin(a) cos(b) - cos(a) sin(b) ($2)

cos(a+b)=cos(a) cos(b) - sin(a) sin(b) ($3)

cos(a-b)=cos(a) cos(b) + sin(a) sin(b) ($4)

demonstrati (calculati) urmatoarele formule:
a) sin2a = 2sin(a) cos(a)
b) cos2a = $\cos^2 a - \sin^2 a$
cos2a = 1-2$\sin^2$a
cos2a = $2\cos^2 a - 1$
c) sin3a=........
cos3a=.......
d) $\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$
e) $\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$
f)) $\mathrm{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$
g)) $\mathrm{ctg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{1-\cos(a)}}$
h)$tg(a \pm b) = \frac{tg(a) \pm tg(b)}{1 \mp tg(a)tg(b)}$
i) $ctg(a \pm b) = \frac{ctg(a)ctg(b) \mp 1}{ctg(b) \pm ctg(a)}$
j) tg2a=$\frac{2tg(a)}{1-tg^2 a}$
j) ctg2a=$\frac{2ctg^2 a - 1}{2ctg(a)}$
k)tg(a+b+c)=...........

5) Pe baza formulelor (\$1),(\$2),(\$3),(\$4) demonstrati formulele de transformare din produs in suma:
a) sin(a) cos(b)=........
b) sin(b) cos(a)=.........
c) cos(a) cos(b)=........
d) sin(a) sin(b)= ....

6) Pe baza formulelor (\$1),(\$2),(\$3),(\$4)
demonstrati **formulele de reducere la cadran** pentru sin,cos,tg,ctg, pentru unghiuri din cadranul 2 =$(\pi - a)$, cadranul 3= $(\pi + a)$, cadranul 4= $(2\pi - a)$

7) Pe baza formulelor (\$1),(\$2),(\$3),(\$4)
demonstrati **formulele unghiurilor complementare**:
a) sin($\frac{\pi}{2} - a$)=cos(a)
b) cos($\frac{\pi}{2} - a$)=sin(a)
c) tg($\frac{\pi}{2} - a$)=ctg(a)
d) ctg($\frac{\pi}{2} - a$)=tg(a)

8) Demonstrati formulele anterioare (7a, 7b, 7c, 7d) prin o alta metoda si anume geometric, folosind un triunghi dreptunghic.

Fila 4 = Numere complexe

Lectia 1

1) Calculati:
a) E = $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46}$
b) E = $(-i)^3 + (-i)^{13} + (-i)^{23} + (-i)^{33} + (-i)^{43}$

2) Calculati:
a) (2+i)(3-2i)
b) (-6+i)(5+2i)
c) $\frac{2+3i}{1-i}$
d) $\frac{2i}{2-i}$
e) $\frac{-2-5i}{4+i} - \frac{6-7i}{4-i}$
Indicatie: la final z=x+$y \cdot i$

3) Aflati x,y $\in R$**din ecuatiile**:
a) (5x+3yi)+(2y-xi)=3-i
b)$\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$

4) Demonstrati egalitatile:
a) $\frac{6-i}{3+4i} = \frac{13+41i}{-25+25i}$
b)$\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$

5) Reprezentati in plan numerele complexe:
a) 3+5i
b) 4-i
c) -2-2i
d) 5i
e) 7

6) Scrieti conjugatele numerelor complexe:
a) 1+i
b) 2-3i
c) 5
d) 4i
e) 0
f) 2i-1

7) Determinati m real astfel incat numarul:
$3i^3 - 2mi^2 + (1-m)i + 5$ sa fie:
a) real
b) imaginar
c) nenul

8) Determinati numerele complexe ale caror patrate sa fie:
a) i
b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) –i

Indicatie: Se porneste de la z=x+yi

9) Determinati x,y reale, astfel incat:

$$(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + yi)^2$$

10) Rezolvati ecuatiile:

a)x^3=27

b) $x^3 = -27$

c)$x^4 = -3$

d)$3x^4 = 5$

11) Simplificati fractia:

$$\frac{12x^2 - x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

Fila 5 = Aplicatiile trigonometriei in algebra

Exercitii

1) Completati tabelul:

	30	45	60	0	90	180	270	360
sin								
cos								
tg								
ctg								

2) De studiat teoria din fisa "Numere complexe"

3) Reprezentati sub forma trigonometrica numerele:

a) z=1+i c) z=$\sqrt{3}+i$

b) z=1+$\sqrt{3}i$ d) z=1+$\sqrt{2}i$

4) Reprezentati sub forma trigonometrica numerele :

a) z= 1-i d) z= $\sqrt{3}-i$ g) z= 1-$\sqrt{2}i$

b) z= -1-i e) z= -$\sqrt{3}-i$ h) z= -1-$\sqrt{2}i$

c)z= -1+i f) z= -$\sqrt{3}-i$ i) z= -1+$\sqrt{2}i$

5) Calculati:

a) $\frac{(1+i)^{123}}{(1-i)^{251}}$

b) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{100}\cdot(-1+i)^{283}}{(-1-i)^{127}}$

c) $\frac{(-1-\sqrt{3}i)^{121}}{(1+\sqrt{3}i)^{100}\cdot(-1+i)^{283}}$

6) Reprezentati sub forma trigonometrica numerele:

a) z= 1+i

b) z= -1+i

c) z= 1-i

d) z= -1-i

7) Calculati:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{9}$

b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$

8) Rezolvati ecuatiile binome:

a) $x^9+1=0$

b) $4x^9+7=0$

c) $4x^9-7=0$

d) $x^8-1=0$

9) Scrieti sub forma trigonometrica urmatoarele expresii:

a) $z = \sin(a) - i\cos(a)$

b) $z = \cos(a) - i\sin(a)$

c) $z = \sin(a) + \cos(a) + i(\sin(a) - \cos(a))$

Fila 6 = Aplicatiile trigonometriei in geometrie

Exercitii

1) Aratati ca daca A,B,C sunt unghiurile unui triunghi, avem:
a) cos(A)+cos(B)+cos(C)=1+4sin($\frac{A}{2}$) sin($\frac{B}{2}$) sin($\frac{C}{2}$)
b) sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)=4sin(A)sin(B)sin(C)
c) cos(2A)+cos(2B)+cos(2C)=1-4cos(A)cos(B)cos(C)
d) $\cos^2(A) + \cos^2(B) + \cos^2(C) = 1 - 2\cos(A)\cos(B)\cos(C)$
e) $\sin^2(A) + \sin^2(B) + \sin^2(C) = 2(1 + \cos(A)\cos(B)\cos(C))$
f) $tg\frac{A}{2} \cdot tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$

Indicatii pentru 1a)= Se transforma in produs cos(A)+cos(B) si se tine cont la cos(C) ca A+B+C=π, de unde C=π-(A+B) deci cos(C)=cos($\pi - (A + B)$), adica cos(C)= - cos(A+B). Se da factor comun ,etc
Punctele 1b,1c similar cu punctul 1a.

Indicatii pentru punctul 1d: Pentru a scapa de patrate se foloseste $\cos\frac{X}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(X)}{2}}$, dupa care se folosesc 1a,1b sau 1c.
Pentru punctul 1e, similar, doar ca se foloseste $\sin\frac{X}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(X)}{2}}$

Indicatie pentru 1f) Se foloseste A+B+C=π, deci $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$, la care se aplica tg la ambii membrii. Deoarece tg$\frac{\pi}{2} = \infty$, inseamna ca numitorul este zero, de unde rezulta relatia ceruta.

2) Demonstrati ca:
b$\cdot \cos(C) - c \cdot \cos(B) = \frac{b^2-c^2}{a}$
Indicatie: Din teorema cosinusului, se scoate cos(C) si cos(B) si se inlocuieste

3) Demonstrati ca intr-un triunghi oarecare avem:
a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$
b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$

Indicatii: Se folosesc formulele:

- $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$
- $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$,
- formula lui Heron= se scoate (p-a)(p-b)(p-c) in functie de S
- formula $S = \frac{abc}{4R}$ si se scoate abc in functie de S

4) Demonstrati ca:
27 R r $\leq 2 \cdot p^2$
Indicatie: Se inlocuieste R din $S = \frac{abc}{4R}$ si apoi se aplica inecuatia mediilor

5) Demonstrati ca:

$$p \geq 3 \cdot R \cdot \sqrt[3]{\sin(A)\sin(B)\sin(C)}$$

Indicatie: Se ridica la puterea a III-a, se foloseste Teorema sinusului si apoi inegalitatea mediilor

6) Determinati forma triunghiului ABC in care:
a) 8sin(A)sin(B)cos(C)+1=0
b)8cos(A)cos(B)cos(C)=1

Indicatie pentru 6a) Se transforma sin(A)sin(B) in produs, apoi se desface paranteza, dupa care se observa ca 1=$\cos^2(A-B)+\sin^2(A-B)$, util pentru A restrange patrat perfect si se obtine $[2\cos(C)+\cos(A-B)]^2+[\sin(A-B)]^2=0$, Adica suma de patrate egala cu zero, deci fiecare patrat este egal cu zero. Se obtine la final cos(C)=$-\frac{1}{2}$ deci C=120 grade si A=B, deci A=B=30, C=120 si anume triunghi isoscel. Pentru 6b) asemanator.

Fila 7 = Exercitii vectori

1) Teorie. Fie 3 puncte A, B, M, astfel:
M A B
x——————————x———-x
unde $\frac{MA}{MB} = t$
Exista formulele:
XM=$\frac{X_A - t \cdot X_B}{1-t}$ si YM=$\frac{Y_A - t \cdot Y_B}{1-t}$
Pentru M=mijloc, adica
A M B
x—————x—————x avem $\frac{MA}{MB} = -1$, deci t= -1 si se obtine
XM=$\frac{X_A + X_B}{2}$ si YM=$\frac{Y_A + Y_B}{2}$

2) Teorie:
Fie A(2,4) . Inseamna ca $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$
Fie B(-2,3). Inseamna ca $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$
Exercitiu: Fie $\overrightarrow{u}(2,6)$si $\overrightarrow{v}(-3,5)$.
a) Calculati si desenati $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
b) Calculati si desenati $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$
c) Calculati si desenati $3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{2v}$:

3) Exercitiu:
Fie punctele A(2,6), B(1,5) si punctul M astfel incat $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$
a) Aflati coordonatele punctului M
b) Aflati coordonatele mijlocului lui AB.

Fila 8 = Puteri si radical

Exercitii

1) Teorie: Completati urmatoarele formule:

$a^m \cdot a^n$	
$(a^m)^n$	
$\frac{a^m}{a^n}$	
a^0	
a^{-m}	
$\sqrt[m]{a^n}$	

2) Calculati:
a) $(\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{128})$
b) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

3) Scrieti sub o forma mai simpla expresiile:
a) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$ b) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{8}}}$ c) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{8\sqrt{4}}}$

4) Rationalizati numitorii fractiilor:
a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$

5) Calculati:
a) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$ b) $\sqrt{9-\sqrt{45}}$ c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

6) Rezolvati ecuatiile:
a) $\sqrt{x+1} = 2$ b) $\sqrt{x-3} = x-3$ c) $\sqrt{7-\sqrt{x-3}} = 2$

Fila 9 = Sisteme de ecuatii clasa a-IX-a

Metoda substitutiei. Sisteme simetrice. Sisteme omogene

1) Rezolvati urmatoarele sisteme prin metoda substitutiei

a) $\begin{cases} x^2 - xy - y = 5 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x^2-xy+1}{x-y} = 3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

2) Rezolvati urmatoarele sisteme simetrice:

Teorie: Sisteme simetrice sunt sistemele la care **daca se inlocuieste x cu y si y cu x**, se obtine acelasi sistem. In acest mod se recunosc sistemele simetrice.

Metoda de rezolvare consta in notarea sumei S=x+y si P=xy. Se exprima totul in

functie de S si P si se rezolva sistemul, obtinand pe S si P. Apoi se afla x si y.

a) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

3) Rezolvati urmatoarele sisteme omogene:

Teorie: **Sisteme omogene** sunt sistemele la care toate monoamele care apar(cu exceptia termenului liber) sunt omogene de gradul doi, adica in toate monoamele apar necunoscute sub forma x^2 sau y^2 sau x^1y^1. In acest mod se recunosc sistemele omogene.

Metoda de rezolvare consta in notarea lui $y = t \cdot x$ si se inlocuieste in sistem. Se da factor comun x^2 in fiecare ecuatie dupa care se imparte ecuatia 1 la ecuatia 2 si se scoate t. Dupa aflarea lui t, se inlocuieste t si se scoate x si apoi y.

Exercitii:

a) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 5 \\ x^2 - xy - y^2 = -2 \end{cases}$

Fila 10 = Functia exponentiala

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "FUNCTIA EXPONENTIALA"

B) Rezolvati ecuatiile :

1)$5^x = 125$
2)$4^x = 1024$
3)$25^x = 0.2$
4)$3^x = \sqrt[3]{9}$
5)$9^x = \frac{1}{729}$
6)$(\frac{4}{9})^x = (\frac{3}{2})^{-5}$
7)$3^{2x-1} = 81$
8)$a^{(x-2)(x-3)} = 1$
9)$5^x + 5^{x+1} = 3750$
10)$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$
11)$5^{2x} - 5^x - 600 = 0$
12)$9^x - 3^x - 6 = 0$
13)$3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$
14)$2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$
15)$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$
16)$3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$
17)$11^x = 17^x$
18)$a^x = b^x$
19) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$
20)$7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$

C) Rezolvati inecuatiile :

1)$3^x \geq 729$
2)$3^x < 3$
3)$2^x \leq 0.25$
4) $\left(\sqrt{2}\right)^x \cdot 2 > \frac{1}{8}$
5) $\left(\frac{1}{81}\right)^x \cdot \sqrt{3} > 1$
6) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0.5}}\right)^x < \frac{1}{4}$
7)$32 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^x > 0.25$

D) Rezolvati:

1)$x + 2^x + \log_2^x = 7$
2)$3^x + 4^x = 5^x$
3)$3^x + 4^x > 5^x$
4) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$

E) TEMA= Rezolvati ecuatiile:

1)$3^{x+1}+3^{x}=108$

2)$2^{x+2}-2^{x-1}=28$

3)$5^{2x+1}-5^{2x-1}=120$

4)$16^{\frac{x+2}{x-7}}=512\cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$

5)$2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^{x}+1=0$

6)$2^{x}+4^{x}=272$

7)$3^{4\sqrt{x}}+2\cdot 3^{2\sqrt{x}}-3=0$

8)$3^{x}=4^{x}$

9)$2^{2x}-13\cdot 6^{x-1}+9^{x}=0$

Fila 11 = Logaritmi = Exercitii

Lectia 1

A) TEORIE: Studiati fisa "LOGARITMI"

B) EXERCITII

Rezolvati ecuatiile:

1) $\lg^{(x)} = \lg^{(2)}$
2) $\lg^{(x)} = -lg^{(2)}$
3) $\log_2^{(x-1)} = log_2^{(x^2-x-16)}$
4) $\frac{2\lg(x)}{\lg(5x-4)} = 1$
5) $\log_{x-1}^{(x2-5x+7)} = 1$
6) $\log_x^{(2)} - log_x^{(3)} = 2$
7) $\log_x^{(x+3)} = log_x^{(x^2+1)}$
8) $\frac{1}{12}(\lg x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg(x)$
9) $3\lg^2(x^2) - \lg^{(x)} - 1 = 0$
10) $2\lg^2(x^3) - 3\lg(x) - 1 = 0$
11) $4\log_3^2(5x) - 7\log_3(15x) + 7 = 0$

Rezolvati inecuatiile:

1) $\lg^{(x^2-3)} > \lg^{(x+3)}$
2) $\lg^2(x) - 2\lg^{(x)} - 8 \leq 0$
3) $\log_2^{(9-2x)} > (3-x)$

Rezolvati si discutati dupa valorile parametrului a, inecuatiile:
1) $\log_a^{(x)} - \log_{a^2}^x + \log_{a^4}^x \geq \frac{3}{4}$
2) $\log_a^{(x)} + \log_a^{(x+5)} + \log_a^{(0.02)} < 0$

Rezolvati sistemele :

1) $\begin{cases} x - y = 90 \\ \lg(x) + \lg(y) = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \cdot y = 40 \\ x^{\lg(y)} = 4 \end{cases}$

Fila 12 = Logaritmi = Exercitii

Lectia 2

A) Rezolvati inecuatiile:

1) $\log_{2^x}^{x} + \log_2^x > 0$
2) $\log_a^x + \log_{ax}^x \geq 0$, pentru $a \in (0, 1)$
3) $\log_m^x + \log_{mx}^x + \log_m^x \cdot \log_{\frac{m}{x}}^x > 0$, pentru m$\in (1, \infty)$
4) $\frac{(\log_a^x)^2 + \log_a^x - 2}{(\log_a^x)^2 - \log_a^x - 2} > 0$, pentru a$\in (0, 1)$

B) Rezolvati ecuatiile:

1) $\log_x^2 + \log_2^x = 2.5$
2) $\log_3^x \cdot \log_{3x}^9 = \log_{9x}^3$
3) $\log_3^x + \log_{\sqrt{x}}^x - \log_{\frac{1}{3}}^x = 6$
4) $x^{\lg(x)} = 100x$
5) $(x)^{\log_x^{(x-1)}} = 2$

C) TEMA = Rezolvati ecuatiile:
1) $\log_{x+2}^{2x^2+5x+2} = 1$
2) $\log_2^2(x+1) - 4\log_2^{x+1} + 3 = 0$
3) $\lg^{(2x-1)} + lg^{(2x+3)} = 2lg^{(2x-2)}$
4) $\log_{x-1}^{x^2+3x-14} = 2$
5) $\log_2^{4^x+2^x-4} = x + 2$
6) $\log_{\sqrt{2}}^x + 2\log_{0.5}^x - \log_4^x = 3$
7) $\log_5^{(x^2-5x+11)} = \log_5^{(3x+11)}$
8) $\log_5^{(2x^2-x-1)} = 1$
9) $\log_{x+1}^{10} = 1$
10) $\log_{x-2}^{2x^2+7x} = 2$
11) $\log_x^{x+2} = \log_x^{3-x}$
12) $3\lg^2(x) - 5\lg(x) + 2 = 0$
13) $\lg(2x+6) - 2\lg(2x-3) = 1$
14) $2\ln(x+2) = \ln(x+14)$
15) $x^2 + 2\log_3^x = 11$

Fila 13 = Analiza combinatorie

Factorialul, Permutari, Aranjamente, Combinari

Lectia 1

A) Teorie: Studiati fisa "ANALIZA COMBINATORIE"

B) Exercitii cu factoriale:

1) Simplificati expresiile:

a) $6!+7!$ b) $\frac{213!}{210!}$ c) $\frac{n!}{(n-2)!}$ d) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$ e) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}$

2) Rezolvati ecuatiile:

a) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$ b) $\frac{12n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$

3) Rezolvati inecuatia:

$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$

C) Exercitii cu aranjamente:

4) Calculati:

$\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$

5) Aflati n, stiind ca:

a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$

b) $\frac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$

D) Exercitii cu combinari:

6) Calculati:

a) C_{10}^8 b) C_{16}^{13} c) $C_{100}^0 + C_{100}^{99}$

7) Aflati n, stiind ca:

a) $C_n^4 = \frac{5n(n-3)}{6}$ b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$ c) $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$

8) Rezolvati inecuatiile:

a) $C_n^5 < C_n^6$ b) $C_n^5 > C_n^7$ c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^k$

9) Rezolvati sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$$

Fila 14 = Analiza combinatorie

Factorialul, Permutari, Aranjamente, Combinari
Lectia 2=Exercitii

1) Rezolvati:

a) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20\cdot n!}{(n-2)!}$

b) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420$

c) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 306$

2) Rezolvati in N:

$A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42 \cdot P_{n-2}$

3) Rezolvati ecuatiile:

a) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$
b) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$
c) $C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4$

4) Rezolvati inecuatiile:

a) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$

b) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$

5) Rezolvati sistemele:

a) $\begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3} \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3} \end{cases}$

Fila 15 = Binomul lui Newton

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "BINOMUL LUI NEWTON"

B) EXERCITII:

1) Determinati termenul al optulea al dezvoltarii $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$

2) Determinati termenul al cincilea al dezvoltarii $\left(\sqrt{2a} - \sqrt{ab}\right)^7$

3) Determinati termenul din mijloc al dezvoltarii $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^6$

4) Determinati cei doi termini din mijloc ai dezvoltarii $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right)^9$

5) Determinati termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care il contine pe x^4

6) Determinati termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care il contine pe a^4

7) Determinati termenul care **nu il contine** pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$

8) Determinati rangulul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$ in care x si y au puteri egale.

9) In dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficientilor binomiali de rang par este egala cu 128. Gasiti termenul care il contine pe a^3

10) Determinati pe n, daca in dezvoltarea $(1+x)^n$, coeficientii lui x^5 si x^{12} sunt egali.

11) Gasiti **rangul celui mai mare termen** al dezvoltarii:

a) $(1 + 0.1)^{100}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$

c) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$

Indicatii:

1. Se va folosi formula $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}$, valabila pentru binomul $(a+b)^n$.
2. Punctul 11a se va preda, iar 11b si 11c individual.

Fila 16 = Progresii aritmetice

Exercitii

A) TEORIE: studiati fisa "PROGRESII ARITMETICE SI GEOMETRICE"

B) EXERCITII:

1) Scrieti primii patru termeni ai unei progresiei arimetice stiind ca:
a) $a_1 = 7, r = 2$
b) $a_1 = -3, r = 5$

2) Determinati primii doi termini ai unei progresii aritmetice :
a) $b_1, b_2, 15, 21, 27$
b) $b_1, b_2, -9, -2, 5$

3) Determinati termenii c_9, c_2, c_{15} stiind ca:
$c_3 = 7$ si $c_5 = 13$

4) Pentru o progresie aritmetica se cunosc :
$a_1 = -2, r = 0.5, n = 12$ Determinati a_n

5) Determinati primul termen si ratia unei progresii aritmetice stiind ca:
$c_5 = 27$ si $c_{27} = 60$

6) Demonstrati ca urmatoarele numere sunt in progresie aritmetica:

$$\frac{a}{x+1}, \frac{x+a-1}{2x}, \frac{x^2+a-1}{x(x+1)}$$

7) Determinati suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice stiind ca:
a) $a_1 = 10, a_{100} = 150$
b) $a_1 = 2, r = -5$

8) Pentru o progresie aritmetica se cunosc sumele:
$S_{10} = 100$ si $S_{30} = 900$. Aflati S_{50}

9) Cunoscand suma S_na unei progresii aritmetice, determinati:
a) primii cinci termini ai progresiei aritmetice, daca $S_n = \frac{n^2}{4} - n$
b) primul termen si ratia progresiei aritmetica, daca $S_n = 2n^2 + 3n$

10) Stabiliti daca este progresie aritmetica un sir pentru care suma S_n are forma:
a) $S_n = n^2 - 2n$ b) $S_n = 7n - 1$ c) $S_n = -4n^2 + 11$ d) $S_n = n^2 - n + 3$

11) Demonstrati ca urmatoarele siruri sunt progresii aritmetice, stiind ca:
a) $a_n = 2n - 5$
b) $a_n = 10 - 7n$

Fila 17 = Progresii geometrice

Exercitii

A) TEORIE: studiati fisa "PROGRESII ARITMETICE SI GEOMETRICE"
B) EXERCITII:

1) Determinati primii cinci termeni ai unei progresii geometrice stiind ca:

$$b_1 = 6, q = 2$$

2) Determinati primii doi termeni ai unei progresii geometrice stiind ca:
a) $y_1, y_2, 24, 36, 54$
b) $y_1, y_2, 225, -135, 81$
3) Determinati termenii b_7, b_9, b_{10} ai unei progresii geometrice stiind ca:

$$b_3 = 6, b_5 = 24$$

4) Determinati primul termen si ratia unei progresii geometrice stiind ca:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = -4 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}$$

5) Calculati sumele:
a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{15}$
b) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ...2^{12}$
c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...\frac{1}{3^{12}}$
d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ..... - \frac{1}{2^{16}}$
e) $1 + x + x^2 + ... + x^{100}$
6) Rezolvati ecuatia:

$$1 + x + x^2 + ... + x^{99} = 0$$

7) Determinati x, astfel incat numerele a+x,b+x,c+x sa fie in progresie geometrica.
8) Determina suma S_9 a unei progresii geometrice stiind ca:
$S_3 = 40$ si $S_6 = 60$
9) Fie o progresie geometrica astfel inacat suma primilor n termeni este
$S_n = 2(5^n - 1)$. Determinati S_4, primul termen si al doilea termen.
10) Determinati daca este progresie geometrica sau nu, un sir pentru care suma primilor n termeni are formula:
a) $S_n = n^2 - 1$ b) $S_n = 2^n - 1$ c) $S_n = 3^n + 1$
11) Determinati daca este progresie geometrica sau nu, un sir care are urmatoarele proprietati:
a) $a_1 = 5, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$
b) $a_1 = 5, a_{n+1} = 2 + a_n$

Fila 18 = Polinoame

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "POLINOAME"

B) IMPARTIREA POLINOAMELOR

1) Impartiti polinoamul f(x) la g(x) si apoi efecuati proba:
f(x)=$2x^5-5x^3-8x+1$ g(x)=x^2-3

2) Impartiti polinoamul f(x) la g(x) folosind SCHEMA LUI HORNER:
f(x)=$x^6-x^5+x^4+2x^3-x^2-3$ g(x)=x+1

Indicatie: exemplu pentru f(x)=$2x^4-5x^3-8x+1$ **g(x)=x-2**
Deoarece g(x) este de forma (x-a), obtinem a=2. Intocmim schema lui Horner:

.	x^4	x^3	x^2	x[1]	x[0] (puteri f(x))
a=2	2	-5	0	-8	1 (coefic.f(x))
	2	-5+2x2=-1	0+2x(-1)=-2	-8+2x(-2)=-12	1+2x(-12)=-23

Catul= $2x^3-1x^2-2x-12$ Restul= -23
Proba: $Deimpartitul = Catul \cdot Impartitorul + Restul$

C) Cmmdc, cmmmc, Polinoame prime

3) Notiuni introductive cmmmc, cmmdc
Fie numerele a=4, b=6
a) aflati cmmmc(a,b)
b) aflati cmmdc(a,b)

4) Determinati cmmdc al polinoamelor f(x) si g(x):
a) f(x)=$(x-1)^5(x+1)^3(x-3)^2(x-4)$ g(x)=$(x-1)^3(x+1)^2(x-4)^5$
b) f(x)=$(x^2-1)^2(x^3-1)(x-2)$ g(x)=$(x-1)^4(x-2)^5$
c) f(x)=$(x^4-1)(x^2-1)(x+3)^2$ g(x)=$(x^2+1)(x+3)^4(x-1)$

5) Determinati cmmdc folosind algoritmul lui Euclid:

a) $f(x)=x^4+x^3-2x^2-4x+4$ g(x)=x^3+x^2+x-3
b) $f(x)=x^3-2x^2+6x-5$ g(x)=x^2-1

6) Demonstrati ca polinoamele f(x) si g(x) sunt prime intre ele:
f(x)=x^4+1 g(x)=x^3-1

Indicatie: Doua polinoame sunt prime intre ele, daca au cmmdc=1
(ca si la numere). Practic, se determina cmmdc cu algoritmul lui Euclid si se verifica daca este egal cu 1.

7) Determinati cmmmc al polinoamelor f(x) si g(x):
f(x)=$2x^5-3x^4-5x^3+x^2+6x+3$ g(x)=$x^4-x^3-x^2+1$

Indicatie: Se determina cmmdc cu algoritmul lui Euclid, apoi se foloseste formula:

$$cmmdc \cdot cmmmc = f \cdot g,$$

de unde se scoate cmmmc.

D) Aplicatii ale impartirii polinoamelor:

8) Determinati un polinom de gradul trei, astfel incat impartit la $x^2 - 3x$ sa dea
restul 6x-15 si impartit la $x^2 - 5x + 8$ sa dea restul 2x-7

9) Determinati parametrul real m, astfel incat polinomul f(x)=$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7$
impartit la x+2 sa dea restul egal cu 4.

10) Determinati un polinom de grad cat mai mic, astfel incat impartit la x+1 sa dea
restul -1 si impartit la x-1 sa dea restul 1.

Fila 19 = Teorema lui Bézout. Radacini multiple

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "POLINOAME"

B) TEORIE:

Idee 1: Teorema lui Bézout:
Numarul a este radacina a polinomului P(x) $\Leftrightarrow$(x-a) divide pe P(x).
Practic, x=a este radacina a lui P(x) $\Leftrightarrow$ P(a)=0
Idee 2: Un polinom P(x)=$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ...a_1 \cdot x^1 + a_0$ se poate
scrie sub forma P(x)=$a_n(x - x_1)(x - x_2).....(x - x_n)$
Idee 3: Radacini multiple: Exemple:
a) radacina dubla, insemna ca $x_1 = x_2 = \alpha$, deci se poate scrie

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha)^2 \cdot Q_{n-2}(x)$$

b) radacina tripla, insemna ca $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, deci se poate scrie

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha)^3 \cdot Q_{n-3}(x)$$

Idee 4: Radacini multiple(se utilizeaza materie de clasa a XI, derivate):
Daca $x = \alpha$ este radacina multipla de ordinul k pentru P(x), atunci:

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P^{'}(\alpha) = 0 \\ P^{''}(\alpha) = 0 \\ .... \\ P^{k-1}(\alpha) = 0 \\ P^{k}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

De exemplu pentru x=5 radacina tripla(k=3) avem relatiile:

$$P(5) = 0, P^{'}(5) = 0, P^{''}(5) = 0, P^{'''}(5) \neq 0$$

C)EXERCITII

1) Aplicand teorema lui Bézout, determinati a si b, astfel incat$P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b$ sa se divida cu $x^2 - 4x + 3$. Aflati apoi catul impartirii.
2) Determinati radacinile pentru P(x)=$x^3 - 6x^2 + 8x + m$, stiind ca are radacina $\alpha = 2$.
3) Aflati a si b stiind ca P(x)=$x^4 - 5x^3 + 8x^2 + ax + b$are radacina dubla $\alpha = 1$.
4) Aflati ecuatia de gradul cel mai mic, ce are ca radacini numerele 1,2,-2.
5) Aflati ecuatia de gradul cel mai mic, ce are radacina tripla = 1 si radacinile simple 2 si -3.
6) Aratati ca 1 este radacina dubla pentru $x^{3n} - n \cdot x^{n+2} + n \cdot x^{n-1} - 1$
7) Determinati ordinal de multiplicitate al radacinii 2 pentru

$$x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

8) Aflati ordinal de multiplicitate al radacinii -1 pentru
$x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 9x + 2$, apoi aflati si celelalte radacini.

9) Aflati A si B astfel incat $A \cdot x^{n+2} + B \cdot x^n + 2$sa fie divizibil cu $(x-1)^2$
10) Aratati ca P(x)=$x^{6n+5} + x^{3n+4} + 1$ se divide la $x^2 + x + 1$.
11) Aratati ca P(x)=$(x+1)^{12n+1} + x^{3n+2}$ se divide la $x^2 + x + 1$.

Fila 20 = Ecuatii de grad superior lui 2

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Ecuatii de grad superior"

B) EXERCITII
1) Ecuatii bipatrate Rezolvati urmatoarele ecuatii:
a) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$ b) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$

2) Ecuatii reciproce Rezolvati urmatoarele ecuatii :

a) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$

b) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$

c) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$

3) Determinati a si b, dupa care rezolvati ecuatia:
$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$ stiind ca **admite radacina 1+2i**

4) Gasiti radacinile polinomului $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ stiind ca **admite radacina** $1 - \sqrt{2}$

5) Determinati radacinile polinomului $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4$
Indicatie: divizorii termenului liber

6) Determinati radacinile polinomului $P(x) = 6x^4 - 17x^3 - x^2 + 8x - 2$
Indicatie: radacini $\frac{\alpha}{\beta}$, unde α= divizor termen liber, β=divizor coeficientului termenului de rang maxim.

7) Rezolvati ecuatiile binome:
a) $x^3 = 1$ b) $x^7 = 5$ c) $4x^8 + 6 = 0$

Fila 21 = Relatiile lui Viète

A) TEORIE

1) Pentru ecuatia de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, exista urmatoarele relatii, numite relatiile lui Viète :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2) Pentru o ecuatie de gradul n:
$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ...a_1 \cdot x^1 + a_0$=0 exista urmatoarele relatii, numite relatiile lui Viète :

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x3......... + x_{n-1} \cdot x_n = +\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + ... = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ S_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot .... \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

3) Exercitiu: Scrieti relatiile lui Viète pentru:
a) Ecuatia de gradul III : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
b) Ecuatia de gradul IV: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

B) PROBLEME:

1) Fie polinomul P(x)= $x^3 - 10x^2 + 29x - 20$. Determinati radacinile x_1, x_2, x_3 stiind ca $x_1 + x_2 = x_3$
2) Fie polinomul P(x)=$x^3 + ax^2 + bx + c$. Notam $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
Determinati:
a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$
b) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
c)$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
d) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

C) Determinarea unei ecuatii care are anumite radacini

Teorie: Exemplu pentru ecuatia de grad II:
Determinati ecuatia care are radacinile $x_1 = 3$ si $x_2 = 4$
Calculam $S = x_1 + x_2 = 7$ si $P = x_1 \cdot x_2 = 12$.
Ecuatia are forma $X^2 - S \cdot X + P = 0$,
adica $x^2 - 7x + 12 = 0$
In mod similar, ecuatia de gradul n care are radacinile $x_1, x_2, ...x_n$ este:

$$X^n - S_1 \cdot X^{n-1} + S_2 \cdot X^{n-2} - S_3 \cdot X^{n-3} + ...(-1)^n \cdot S_n = 0$$

Probleme:
1) Fie ecuatia $x^3 - 5x + 1 = 0$. Determinati ecuatia care are ca radacini **dublul** radacinilor ecuatiei date.
2) Fie ecuatia $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$. Determinati ecuatia care are ca radacini **inversele** radacinilor ecuatiei date

Fila 22= Inductia matematica

A) Teorie Pentru a demonstra adevarul unei propozitii $P_n$prin metoda inductiei matematice este necesar sa se efectueze urmatorii pasi:

1) Se defineste clar care este propozitia pe care dorim sa o demonstram, o notam P_n

2) Se demonstreaza ca $P(a)$este adevarat, adica faptul ca propozitia este adevarata pentru un caz particular (pentru un numar a oarecare**).**

3) Se presupune propozitia $P_n$ca fiind adevarata si se incearca sa se arate ca bazat pe faptul ca P_n = presupus adevarat, implica si P_{n+1} =adevarat.

4) Din faptul ca $P(a)$ =adevarat si $P_n$presupus adevarat implica faptul ca P_{n+1} =adevarat, se poate trage concluzia (conform metodei inductiei matematice) ca propozitia P_n =adevarat.

B) Exercitii

1) Demonstrati urmatoarele egalitati:
a) $1+2+3+.....n=\frac{n(n+1)}{2}$
b) $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $1\cdot 2+2\cdot 3+....n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
d) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+.......+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$
e) $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+......+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}=1$

2) Calculati suma:

$$S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+.......n\cdot n!$$

Indicatie: Deoarece nu se cunoaste cu cat este egala suma, se va incerca pentru n=1,
apoi n=2, apoi n=3 , pana se banuieste care ar fi forma lui S_n. Banuim ca este de forma S_n = (n+1)!-1. Aceasta vom demonstra prin inductie.

3) Demonstrati urmatoarele inegalitati:
a) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, pentru n≥2
Indicatie: Se arata pe rand cele doua inegalitati implicate, adica:
$\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}$ si apoi ca $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$
b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot.......\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, pentru n≥1
Indicatie: Se foloseste tranzitivitatea, adica de genul: daca A< B si B<C, atunci A< C

4) Demonstrati divizibilitatea urmatoarelor numere:
a) Demonstrati ca 7^n-1 este divizibil cu 6
b) Demonstrati ca n^3+11n este divizibil cu 6

Indicatie punct 4a : Se presupune propozitia $P_n = adevarata$, adica $7^n - 1 = k \cdot 6$.
Scopul este sa aratam ca P_{n+1} este adevarat, adica faptul ca $7^{n+1} - 1 = Intreg \cdot 6$.
Se scoate din expresia P_n presupusa adevarata, $7^n = k \cdot 6 + 1$ si se inlocuieste in expresia lui P_{n+1}

Mentiuni: Metoda inductiei matematice se poate aplica la multe alte tipuri de probleme.
De exemplu :
a) pentru algebra de clasa XI, se poate da o matrice A si se cere sa se calculeze A^n.
De avut in vedere a inmultirea matricilor nu este comutativa, formula de folosit fiind $A^n = A^{n-1} \cdot A$.
b) pentru analiza matematica de clasa a XI, se poate da o functie f(x) si se cere sa se calculeze derivate de ordinul n a functiei, $f^{(n)}(x)$.

Fila 23 = Probleme reprezentative

Algebra clasa a IX-a

1) Fie x_1, x_2radacinile ecuatiei $x^2 + px + q = 0$. Formati ecuatia de gradul doi in y cu
radacinile $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ si $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

2) Determinati valorile parametrului m, astfel incat radacinile ecuatiei
$x^2 + (1 - m)x - m = 0$ sa aiba:
a) acelasi semn
b) semen diferite

3) Fie ecuatia $4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0$. Aflati m real astfel incat:
a) $x_1 \leq x_2 < 1$
b) $1 < x_1 \leq x_2$
c) $x_1 < 1 < x_2$

4) Determinati multimile:
a) A=$\left\{x \in N | x = \frac{4n}{n+2}, n \in N\right\}$
b) $B = \left\{x \in Z | x = \frac{6n+7}{3n+1}, n \in Z\right\}$

5) Fie functiile f:R→R si g:R→R, unde:
f(x)=$\begin{cases} 2x - 3, x \leq 0 \\ 7x, x > 0 \end{cases}$ si g(x)=$\begin{cases} x^2, x \leq -2 \\ 2x - 1, x > -2 \end{cases}$
Determinati f∘g, g∘f si f∘f

6) Determinati m∈R, astfel incat inecuatia urmatoare sa fie verificata pentru orice x∈R:

$$(m - 1)x^2 - (m + 1)x + (m + 1) > 0$$

7) Fie familia de functii de gradul doi:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2, m \in R\setminus\{0\}\ .$$

Aratati ca varfurile parabolelor asociate acestor functii se gasesc pe dreapta y=x+1.

8) Rezolvati sistemul :

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

9) Rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} xy + y + x = 11 \\ x^2y + y^2x = 30 \end{cases}$$

10) Rezolvati ecuatia:

$\sqrt{x-3} = x-3$

11) Transformati expresiile:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$

12) Transformati expresiile:

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$ b) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$

13) Calculati expresia

E=$i^6 + i^{16} + i^{26} + (-i)^{36} + i^{46}$

14) Determinati numerele complexe ale caror patrate sa fie:

a) i

b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

15) Determinati numerele reale x, y din ecuatia:

$\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1-3i$

Fila 24 = Probleme reprezentative

Algebra clasa a X-a

1) Rezolvati ecuatiile:
a) $x + 2^x + \log_2^x = 7$
b) $3^x + 4^x = 5^x$
c) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$

2) Rezolvati inecuatiile:
a) $3^x + 4^x > 5^x$
b) $\log_{2^x}^x + \log_2^x > 0$

3) Calculati suma $S = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+3)$

4) Demonstrati:
a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot .... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, pentru n$\geq$1.
b) $2^n > n^2$ pentru n$\geq$5.
c) $7^n - 1$ este divizibil cu 6.

5) In dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficientilor binomiali de rang par este egala cu 128. Determinati termenul care il contine pe a^3.

6) Determinati rangul celui mai mare termen al dezvoltarii $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$.

7) Cunoscand suma S_na unei progresii aritmetice, determinati primul termen si ratia progresiei aritmetice, daca $S_n = 2n^2 + 3n$.

8) Stabiliti daca este progresie aritmetica un sir pentru care suma S_n are forma:

$$S_n = n^2 - 2n.$$

9) Determinati x real astfel incat urmatoarele trei numere sa fie in progresie artimetica:

$$1 + x^2, (a+x)^2, (a^2+x)^2$$

10) Aflati A si B astfel incat $A \cdot x^{n+2} + B \cdot x^n + 2$sa fie divizibil cu $(x-1)^2$

11) Aratati ca P(x)=$(x+1)^{6n+1} + x^{6n+2}$ se divide la $x^2 + x + 1$.

12) Fie polinomul P(x)=$x^3 + ax^2 + bx + c$. Notam $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
Determinati:
a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$
b) $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
c)$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
d) $S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

13) Rezolvati ecuatiile:

a) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$
b) $4x^8 + 6 = 0$
c) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$
d) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$

14) Determinati radacinile polinomului
$x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 18$ stiind ca admite radacina $1 + i\sqrt{3}$

15) Determinati radacinile polinomului $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4$.

Fila 25 = Determinanti

Lectia 1

A) TEORIE: Studiati fisa "Determinanti"

B) Exercitii:

1) Calculati urmatorii determinanti:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

2) Calculati urmatorii determinanti Vandermonde:

a) gradul II : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$

b) gradul III: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

c) gradul IV: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

3) Calculati determinantii:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

4) Verificati egalitatile:

a) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$=2abc(a-b)(b-c)(c-a)

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$=(xy+yz+zx)(x-y)(y-z)(z-x)

5) Rezolvati ecuatia:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

6) Calculati determinantul d= $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ stiind ca x_1, x_2, x_3, x_4 sunt

radacinile ecuatiei $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

7) Calculati determinantul d=$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ stiind ca x_1, x_2, x_3sunt radacinile ecuatiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

Fila 26 = Matrici

Lectia 1

A) TEORIE: Studiati fisa "Matrici"

B) EXERCITII:

1) Operatii cu matrici:

Fie A=$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ si B=$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calculati A+B
b) Calculati A-B
c) Calculati 7A
d) Calculati 3A-2B

2) Inmultirea matricilor:

Fie A=$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ si B=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Calculati AB-BA

3) Determinati matricea X din ecuatia matriciala:

$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Calcul A^n

Fie A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculati A^n, pentru n≥1.

5) Calcul A^n

Fie A=$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$. Calculati A^n, pentru n≥1.

6) Ecuatii matriciale:

Rezolvati ecuatia matriciala: $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

7) Calculati suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ -1 & 2 & 3 & k(k+1) \end{bmatrix}$$

8) Daca ωeste radacina ecuatiei: $x^2 + x + 1 = 0$, calculati:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \varpi^k & \varpi^{2k} & \varpi^{3k} \\ \varpi^{3k} & \varpi^k & \varpi^{2k} \end{bmatrix}.$$

9) **Termeni noi:** Matrice linie, matrice coloana, matrice dreptunghiulara, matrice nula, matrice unitate, diagonala principala, diagonala secundara.

Fila 27 = Matrici

Matricea inversa

A) TEORIE: Studiati fisa "Matricea inverse. Rangul unei matrici"

Fie de exemplu matricea $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Pasii determinarii matricei inverse A^{-1} sunt urmatorii:

1) Se calculeaza determinantul matricii.

a) daca det(A)=0, se trage concluzia ca matricea nu este inversabila si stop.

b) daca det(A)# 0, se trage concluzia ca matricea este inversabila si se continua.

2) Se calculeaza matricea transpusa A^t, prima coloana din A^t fiind prima linie din A, a doua coloana din A^t fiind prima a doua linie din A, s.a.m.d., de exemplu:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

3) Se formeaza matricea A^* pe baza matricii transpuse, avand tot atatea elemente ca si matricea transpusa, modul de calcul fiind urmatorul:

$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, unde de exemplu $a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix}$

4) Se formeaza matrice inversa A^{-1} cu formula

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\det(A)} & \frac{a_{12}}{\det(A)} & \frac{a_{13}}{\det(A)} \\ \frac{a_{21}}{\det(A)} & \frac{a_{22}}{\det(A)} & \frac{a_{23}}{\det(A)} \\ \frac{a_{31}}{\det(A)} & \frac{a_{32}}{\det(A)} & \frac{a_{33}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

5) Optional, se face proba $A \cdot A^{-1} = I_n$, unde I_n este matricea unitate pentru dimensiunile matricii patratice A. In cazul nostru $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B) EXERCITII

1) Calculati matricea inversa A^{-1} pentru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Rezolvati ecuatia matriciala:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

3) Rezolvati ecuatiile matriciale:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$

Fila 28 = Sisteme de ecuatii liniare

Lectia 1

A) TEORIE: Studiati fisele:

- Sisteme de ecuatii liniare
- Compatibilitatea sistemelor de ecuatii liniare reprezentata grafic
- Sisteme de ecuatii liniare particulare

B) EXERCITII:

1) Rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

2) Studiati compatibilitatea sistemelor urmatoare, iar daca sunt compatibile sa le rezolvati:

a) $\begin{cases} 3x+y+2z=8 \\ 2x-3y+z=1 \\ 5x+9y+4z=22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y+z=2 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y+3z+t=-8 \\ 3x+y-z+2t=-5 \\ 2x+2y-4z+t=3 \end{cases}$

3) Discutati sistemul urmator in functie de parametrul real m:

$$\begin{cases} x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ mx+m^2y-z=m^2 \end{cases}$$

4) Discutati sistemul urmator in functie de parametrii reali m si n:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+z=n \\ mx+y+z=4 \end{cases}$$

Fila 29 = Sisteme de ecuatii liniare

Lectia 2

A) TEORIE: Studiati fisele:

- Sisteme de ecuatii liniare
- Compatibilitatea sistemelor de ecuatii liniare reprezentata grafic
- Sisteme de ecuatii liniare particulare

B) EXERCITII:

1) Verificati daca sistemul urmator are solutii. In caz afirmativ, sa se rezolve**:**

$$\begin{cases} x - y + 3z + t = -8 \\ 3x + y - z + 2t = -5 \\ 2x + 2y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

2) Rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 6x - 8y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$$

3) Rezolvati sistemele omogene:

a) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 4z - 3t = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4t = 0 \\ 4x + 5y - 2z + 3t = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19t = 0 \end{cases}$

4) Determinati m real astfel incat sistemul urmator sa admita solutii nu toate nule, dupa care rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z - 2t = 0 \\ mx - 6y - 4z + 2t = 0 \\ 3x + y - 3z + 4t = 0 \\ 2x - my - 2z = 0 \end{cases}$$

Fila 30 = Recapitulare Algebra XI

Fisa 1

1) Fie matricile:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \text{ si } B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculati:

a) A+B

b) A-B

c) 3A-2B

2) Fie matricile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ si } B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$$

Calculati:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$3) Determinati matricea X din ecuatia matriciala:

$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Calculati urmatorii determinanti:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

5) Rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

6) Rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 5x + 9y + 4z = 22 \end{cases}$$

7) Discutati dupa parametrul real m sistemul urmator si il rezolvati:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ x + 4y + mz = 8 \end{cases}$$

8) Rezolvati sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 6y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + 4y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

Fila 31 = Recapitulare Algebra XI

Fisa 2

1) Rezolvati sistemele matriciale:

a) $\begin{cases} 2 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 \cdot A - 5 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot A + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \end{cases}$

2) Determinati inversa matricii A, pentru:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3) Rezolvati ecuatiile matriciale:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4) Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{bmatrix}.$$

Determinati m astfel incat matricea sa fie inversabila.

5) Determinati rangul matricilor:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

6) Demonstrati urmatoarea identitate:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

7) Determinati compatibilitatea sistemelor, iar daca sunt compatibile sa se rezolve:

a) $\begin{cases} 3x+5y-2z=11 \\ x+4y+8z=3 \\ 2x+y-10z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=11 \end{cases}$

8) Determinati m si n reali, astfel incat sistemul urmator sa fie compatibil nedeterminat, apoi sa se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x+y-mz=-1 \\ -2x+3y+(1-m)z=0 \\ 2mx-2y+nz=n \end{cases}$$

Fisa 3

1) Rezolvati ecuatia matriciala:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calculati A^n

3) Calculati suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} 2 & k^2 & -k \\ 3 & 0 & k^3 \end{bmatrix}$$

4) Determinati rangul matricei:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ n & n+1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, unde n=parametru real.

5) Rezolvati ecuatiile matriciale:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6) Calculati determinantul:

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

stiind ca x_1, x_2, x_3 sunt radacinile ecuatiei $2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 = 0$

7) Rezolvati ecuatia cu determinant:

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$$

8) Fie sistemul

$$\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ x + 5y + z = 7 \\ x + y + a \cdot z = b \end{cases}$$

unde a si b sunt parametri reali.

a) Pentru a=5, b=7 rezolvati sistemul.

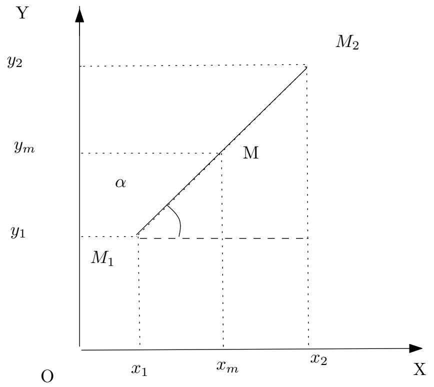
b) Determinati a si b, astfel incat sistemul sa fie incompatibil.

Fila 33 = Geometrie analitica

Dreapta. Teorie

FORMULE:

Fie dreapta M_1M_2 si M = mijlocul lui M_1M_2:



1) **Lungimea** lui M_1M_2: $\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

2) **Mijlocul** M al segmentului M_1M_2:

$\boxed{M(x_m, y_m), \text{ unde } x_m = \frac{x_1+x_2}{2},\ y_m = \frac{y_1+y_2}{2}}$

3) **Panta** dreptei M_1M_2(se mai noteaza cu m si este egala cu $tg\alpha$, unde α= unghiul facut de dreapta cu axa Ox).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4) Fie doua drepte d_1 si d_2 de pante $m_1$si m_2

a) Daca d_1 este **paralela** cu $d_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$

b) Daca d_1 este **perpendiculara** pe $d_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

5) Fie M un punt de coordinate (x_0, y_0). **Ecuatia unei drepte** care:

a) trece prin punctul (x_0, y_0) si (de exemplu prin punctul (1,2))

b) are panta m (de exemplu panta m=7)

este:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ (de exemplu y-2=7(x-1))

6) Fie trei puncte $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Conditia ca cele trei puncte, A,B,C sa fie **coliniare** , este ca determinantul urmator sa fie egal cu zero:

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7) Fie doua drepte :

d_1 : y=$m_1 x + n_1$ (de panta m_1, unde φ_1 = unghiul facut de d_1 cu Ox)

d_2 : y=$m_2 x + n_2$ (de panta m_2 unde φ_2 = unghiul facut de d_2 cu Ox)

Unghiul φ dintre aceste doua drepte se poate calcula cu formula:

$tg\varphi = \frac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1+tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}$, sau altfel scris: $m = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1 \cdot m_2}$

8) Fie o dreapta scrisa sub forma d: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$ si un punct $A(x_0, y_0)$.

Distanta de la punctul $A(x_0, y_0)$**la dreapta** d: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$ se poate calcula cu formula:

distanta(A,d)=$\frac{\alpha \cdot x_0 + \beta \cdot y_0 + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

9**) Recapitulare** pentru formulele de calcul a **suprafetei unui triunghi**:

a) $S = \frac{baza \cdot inaltimea}{2}$ b) $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin(A)}{2}$ c)$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

d) $S = r \cdot p$ e) $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$

Recomandare: De studiat fisele “Geometrie plana” si “Formule trigonometrie”.

Fila 34 = Geometrie analitica

Dreapta. Exercitii

1) Fie punctele A(1,2) si B(3,8).

a) Calculati lungimea segmentului AB.

b) Determinati mijlocul segmentului AB.

c) Aflati unghiul pe care il face dreapta AB cu Ox.

d) Verificati daca dreapta AB este paralela cu dreapta y=3x+2

e) Verificati daca dreapta AB este perpendicular ape dreapta y=-3x+1

2) Scrieti ecuatia unei drepte care trece prin punctul M(2,3) si face cu axa Ox un unghi de 60°.

3) Verificati daca punctele $A(-\frac{4}{5}, 2), B(\frac{2}{5}, 4), C(1, 5)$ sunt coliniare.

4) Se da triunghiul ABC cu A(-1,3), B(2,-1), C(3,6). Determinati:

a) ecuatia dreptei AC.

b) ecuatia paralelei prin B la AC.

c) ecuatia mediatoarei segmentului AC.

d) ecuatia medianei din B.

e) ecuatia inaltimii din B.

5) Verificati daca triunghiul ABC, avand varfurile A(3,3), B(6,3), C(3,6) este dreptunghic isoscel.

6) Se dau punctele A(8,0), B(3,6), C(0,3). Dreapta BC taie axa Ox in D, iar AB taie axa Oy in E. Aratati ca mijloacele segmentelor OB, AC, DE sunt coliniare.

7) Fie dreptele

d_1: y=4x+3 si

d_2 : 3x+5.

Determinati unghiul dintre dreptele d_1 si d_2.

8) Fie dreptele:

$$d_1 : x - 2y + 3 = 0$$
$$d_2 : 4x - y - 9 = 0$$
$$d_3 : 2x + 3y - 1 = 0$$

a) determinati coordonatele triunghiului ABC.

b) scrieti pentru triunghiul ABC ecuatiile inaltimilor .

c) scrieti pentru triunghiul ABC ecuatiile medianelor.

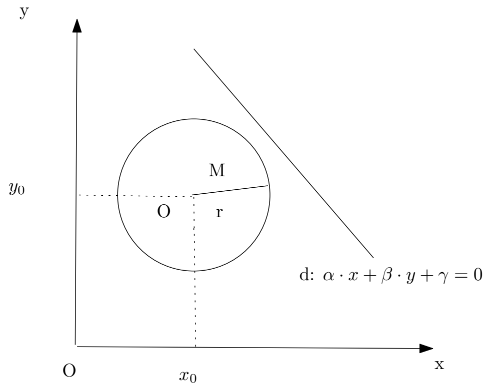
Fila 35 = Geometrie analitica

Cercul. Teorie

FORMULE:

Definitia cercului: Cercul este locul geometric al punctelor din plan, egal departate de un punct, numit centrul cercului.

Fie un cerc avand centrul in punctul M(x_0, y_0) si o raza r:



1) Ecuatia cercului cu centrul in punctul de coordinate (x_0, y_0) , de raza r:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

2) Ecuatia unui cerc cu centrul in origine. Se observa ca pentru $x_0 = 0$ si $y_0 = 0$ se obtine ecuatia cercului cu centrul in origine:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3) Pozitia unei drepte fata de cerc. Fie o dreapta de ecuatie d: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0$ si cercul cu centrul in punctul M(x_0, y_0). Se poate calcula distanta de la un punct la o dreapta cu formula obisnuta,

Valabila pentru orice punct si orice dreapta:

$$\boxed{\text{distanta(M,d)}=\frac{\alpha \cdot x_0 + \beta \cdot y_0 + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}$$

Consecinte:

a) Daca distanta(M,d) > r, inseamna ca dreapta d este **exterioara cercului**.

b) Daca distanta(M,d) = r, inseamna ca dreapta d este **tangenta cercului**.

c) Daca distanta(M,d) < r, insemana ca dreapta d este **secanta cercului**.

4) Ecuatia tangentei la cerc. Tangenta in punctul $A(x_1, y_1)$la cercul de centru M(x_0, y_0) si raza r are urmatoarea ecuatie:

$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1$-y$_0)(y - y_0) = r^2$

(ecuatia prin dedublare)

5) Ecuatia normalei la cerc. Pentru determinarea ecuatiei normalei in punctul $A(x_1, y_1)$la cercul de centru M(x_0, y_0) si raza r se procedeaza astfel:

a) se afla ecuatia tangentei folosind ecuatia prin dedublare si de aici se determina panta tangentei.

b) se tine cont ca normala trece prin $A(x_1, y_1)$ si este perpendiculara pe tangenta, deci $m_{normalei} = -\frac{1}{m_{\tan gentei}}$

c) se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctul $A(x_1, y_1)$ si are panta $m_{normalei:}$

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_{\tan gentei}}(x - x_1)$$

Fila 36 = Geometrie analitica

Elipsa. Teorie

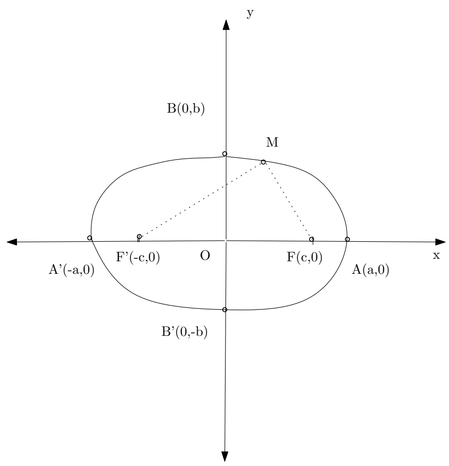
FORMULE:

1) Definitia elipsei: Fie doua puncte F si $F^{'}$ numite focare si un punct M aflat pe elipsa. Elipsa reprezinta locul geometric al punctelor M care indeplinesc relatia:

$$\boxed{MF + MF^{'} = 2a}$$

Cu alte cuvinte, suma distantelor de la orice punct aflat pe elipsa la cele doua focare este constanta si anume este egala cu lungimea axei mari.

2) Desenul: Fie urmatoarea elipsa:



3) Termeni noi:

- $F, F^{'}$= focarele elipsei

- dreapta $FF^{'}$= axa focala

- $FF^{'}$= distanta focala

$A, A^{'}, B, B^{'}$=varfurile elipsei

$AA^{'}$=axa mare a elipsei

$OA, OA^{'}$= semiaxele mari ale elipsei

$BB^{'}$= axa mica a elipsei

$OB, OB^{'}$=semiaxele mici ale elipsei.

Se observa ca pentru a=b , elipsa degenereaza intr-un cerc de raza a.

4) Formula elipsei:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ existand relatia: } a^2 = b^2 + c^2}$$

- Formula explicita a elipsei: Se scoate y din relatia anterioara:

$\rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) \rightarrow$ se obtine:

a) $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (partea elipsei de deasupra axei Ox)

b) $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (partea elipsei de sub axa Ox)

5) Ecuatia tangentei la elipsa in punctul $M(x_0, y_0)$ are ecuatia:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

ecuatia prin dedublare

6) Ecuatia normalei la elipsa in punctul $M(x_0, y_0)$.

Indicatie: Se tine cont ca normala la elipsa este perpendiculara pe tangenta la elipsa.

Fila 37 = Geometrie analitica

Hiperbola. Teorie

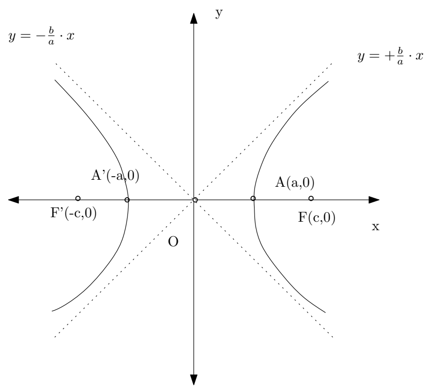
FORMULE:

1) Definitia hiperbolei: Fie doua puncte F si $F^{'}$ numite focare si un punct M aflat pe hiperbola. Hiperbola reprezinta locul geometric al punctelor M care indeplinesc relatia:

$$|MF - MF^{'}| = 2a$$

Cu alte cuvinte, modulul diferentei distantelor (adica diferenta distantelor, fara a conta semnul) de la orice punct aflat pe hiperbola la cele doua focare este constanta si anume este egala cu lungimea axei mari.

2) Desenul: Fie urmatoarea hiperbola:



3) Termeni noi:

- $A, A^{'}$ = varfurile hiperbolei
- OX = axa transversala
- OY = axa netransversala
- F, F' = focarele hiperbolei
- dreapta $FF^{'}$ = axa focala
- distanta $FF^{'}$= distanta focala
- $MF, MF^{'}$ = razele focale ale punctului M.

-dreptele $y = +\frac{b}{a} \cdot x$ si $y = -\frac{b}{a} \cdot x$ se numesc asimptotele hiperbolei.

4) Formula hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ existand relatia: } a^2 = b^2 + c^2$$

- Formula explicita a hiperbolei: Se scoate y din relatia anterioara:

$\rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2) \rightarrow$ se obtine:

a) $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (partea hiperbolei de deasupra axei Ox)

b) $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (partea hiperbolei de sub axa Ox)

5) Ecuatia tangentei la hiperbola in punctul $M(x_0, y_0)$ are ecuatia:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

ecuatia prin dedublare

6) Ecuatia normalei la hiperbola in punctul $M(x_0, y_0)$.

Indicatie: Se tine cont ca normala la hiperbola este perpendiculara pe tangenta la hiperbola.

7) Intersectia dintre o dreapta d: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$=0 si hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se determina rezolvand sistemul:

$$\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Interpretare rezultate sistem:

a)Daca sistemul are 2 solutii, insemana ca dreapta este secanta hiperbolei.

b)Daca sistemul are 1 solutie, insemana ca dreapta este tangenta hiperbolei.

c)Daca sistemul nu are solutii, insemana ca dreapta nu intersecteaza hiperbola.

.

Fila 38 = Geometrie analitica

Parabola. Teorie

FORMULE:

1) Definitia parabolei:

a) Constructia parabolei:

Fie un punct **F numit focarul parabolei** si o **dreapta h numita directoarea parabolei**.

- Se duce o perpendiculara din focarul F pe directoarea h. Punctul A reprezinta intersectia dintre perpendiculara din F pe h.

- Punctul O, numit varful parabolei, se afla la jumatatea distantei dintre focarul F si

punctul A de intersectie dintre perpendiculara din F pe directoarea h.

- Punctul O se considera ca origine a axelor.

Distanta FA se noteaza cu p. Deci FO=OA=$\frac{p}{2}$. Deoarece O se considera ca origine a axelor, punctul F are coordonatele $F(\frac{p}{2}, 0)$ iar A are coordonatele $A(-\frac{p}{2}, 0)$

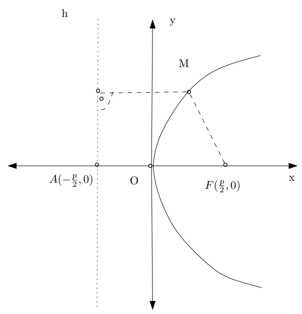
b) Definitia parabolei:

Parabola reprezinta locul geometric al punctelor M care indeplinesc relatia:

$$\boxed{\text{distanta(M,h)=distanta(M,F)}}$$

Cu alte cuvinte, distanta de la orice punct aflat pe parabola pana la focar (F), este egala cu distanta de la acel punct al parabolei la o dreapta numita directoarea parabolei.(h)

2) Desenul: Fie urmatoarea parabola:



De retinut: AF $\perp$h si O= mijlocul lui AF.

3) Termeni noi:

F = focarul parabolei.

h = directoarea parabolei.

O= varful parabolei.

p = AF si este distanta dintre focarul F si intersectia lui h cu OX.

MF=raza focala a punctului M.

4) Formula parabolei:

$$\boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$$

Exemplu: Ecuatia $y^2 = x$ reprezinta ecuatia unei parabole, deoare ce poate scrie

sub forma echivalenta $y^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x$, de unde se observa ca $p = \frac{1}{2}$.

- Formula explicita a parabolei: Se scoate y din relatia anterioara si se obtine:

a) $y = +\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$ (partea parabolei de deasupra axei Ox)

b) $y = -\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$ (partea parabolei de sub axa Ox)

5) Ecuatia tangentei la parabola in punctul $M(x_0, y_0)$ are ecuatia:

$$y \cdot y_0 = 2 \cdot p \cdot (x + x_0)$$

ecuatia prin dedublare

6) Ecuatia normalei la elipsa in punctul $M(x_0, y_0)$.

Indicatie: Se tine cont ca normala la elipsa este perpendiculara pe tangenta la elipsa.

7) Intersectia dintre o dreapta d: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$=0 si elipsa $y^2 = 2px$ se determina rezolvand sistemul:

$$\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

Interpretare rezultate sistem:

a) Orice dreapta paralela cu Ox, este secanta parabolei.

b)Daca sistemul are 1 solutie, insemana ca dreapta este tangenta parabolei.

c)Daca sistemul nu are solutii, insemana ca dreapta nu intersecteaza parabola.

Fila 39 = Geometrie analitica

Cerc, Elipsa, Hiperbola.Parabola

Exercitii

Cercul:

1) Scrieti ecuatia unui cerc, determinat prin:

a) Centrul M(2,-3) si raza r=7

b) Extremitatile diametrelor A(3,2) si B(1,6).

c) Punctele A(-1,5), B(-2,2), C(5,5) , stiind ca A,B,C apartin cercului.

2) a) Aratati ca ecuatia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezinta ecuatia unui cerc, punand in evidenta centrul cercului si raza.

b) Scrieti ecuatia tangentei la cerc in punctul A(2,0).

3) Fie cercul $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$..

Aflati distanta de la centrul cercului la dreapta y=3x+2.

4) Verificati daca punctul A(2,3) apartine cercului $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Elipsa:

5) Se da elipsa avand focarele F(1,0) si $F^{'}$(-1,0) si semiaxa mare a=5.

a) Desenati elipsa

b) Scrieti ecuatia elipsei.

6) Se dau ecuatiile:

$$E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$E_2 : 3x^2 + 2y^2 = 12$$

Pentru fiecare elipsa, aflati varfurile, axele, focarele si faceti desenul elipsei.

Hiperbola:

7) Fie hiperbolele:

$$H_1 : x^2 - y^2 = 1$$

$$H_2 : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Pentru fiecare dintre hiperbole, aflati varfurile, focarele si asimptotele.

8) Fie hiperbola :

H: $2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$

a) aflati varfurile si asimptotele lui H.

b) scrieti ecuatia tangentei la hiperbola in punctul A($\sqrt{10}$,$\sqrt{2}$).

c) scrieti ecuatia normalei la hiperbola in punctul A($\sqrt{10}$,$\sqrt{2}$).

Parabola:

9) Se da parabola determinata prin varful O(0,0) si focarul F(2,0).

a) scrieti ecuatia parabolei.

b) desenati parabola

10) Se da parabola determinata prin ecuatia $y^2 = 6x$, avand focarul F(1,0).

Determinati varful parabolei si directoarea.

Fila 40 = Limite de siruri

Tipuri de baza

A) TEORIE: Se recomanda studierea fisei **"Limite de siruri"**

B) EXERCITII

1) Tipul 1 = Fractii

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2-1}{2n^4+2n^2-2}$

b) $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+2}-n}{2n+1}$

2) Tipul 2 = Sume consacrate

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2\cdots n^2}{2n^2-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

3) Tipul 3 = Radicali

$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3})$

4) Tipul 4 = Folosind formula $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n-1}$

5) Tipul 5 = Folosind $a^n\to 0$**, pentru a= subunitar**

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}-5^{n-2}}{2\cdot 7^n+3\cdot 5^{n+1}}$

6) Tipul 6 = Teorema cleste

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$

Fila 41 = Limite de siruri

Exercitii tipurile 1,2,3,4,5

Calculati limitele urmatoarelor siruri, pentru n->∞

Tipul 1

1)$a_n = \frac{-3n^5+2n+3}{-n^4+n^3+1}$

2)$a_n = \frac{n^4-2n^2+1+n}{-\frac{1}{3}n^2+n}$

3)$a_n = \frac{-2n+1}{n^2+2}$

4)$a_n = \frac{2n+\sqrt{5n^2+3}}{3n+6}$

5)$a_n = \frac{n^4-\sqrt{6n^6+4}}{2n^7+2n+3}$

6)$a_n = \frac{\sqrt[5]{n^{10}-2n^4+1}+5n^2}{4n^2+3n+1}$

7)$a_n = \frac{4n^3-\sqrt[3]{n^{11}-24n+3}}{3n^2+1}$

Tipul 2

8)$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$

9)$a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$

10)$a_n = \frac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)}{n^2}^2$

11)$a_n = \frac{1\cdot3+3\cdot5+\cdots+(2n-1)(2n+1)}{n^3}$

12)$a_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

13)$a_n = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

14)$a_n = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{2\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$

Tipul 3

15)$a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$

16)$a_n = 2n - \sqrt[3]{8n^3+n^2+1}$

17)$a_n = \sqrt{4n^2+3n-1} - 2n$

18)$a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

19)$a_n = \sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n-1}$

20)$a_n = \sqrt[3]{n^2} \cdot (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1})$

Tipul 4

$21) a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n-1}$

$22) \left(\frac{n^2+n}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$

$23) a_n = \left(\frac{n+\sqrt[3]{n+1}}{n+\sqrt[3]{n+2}}\right)^n$

$24) a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+5}\right)^n$

Tipul 5

$25) a_n = \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$

$26) a_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}$

Fila 42 = Limite de siruri

Exercitii tipurile 1,2,3,4,5

Tema

Calculati limitele urmatoarelor siruri, pentru n->∞

Tipul 1

$1)a_n = \frac{5n^4+2n^3+1}{-3n^3+6}$

$2)a_n = \frac{2n^3+\sqrt{n^2+1}}{n^5+3}$

$3)a_n = \frac{\sqrt{3\cdot n^2}+n+1}{5\cdot\sqrt[3]{n}+2}$

Tipul 2

$4)a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{3+12+\cdots+3n^2}$

$5)a_n = \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{4n^2+5}$

Tipul 3

$6)a_n = \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$7)a_n = n-\sqrt{n^2+n+1}$

$8)a_n = n(\sqrt{n^2+1}-n)$

$9)a_n = n\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$

$10)a_n = (\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3})$

$11)a_n = \sqrt[3]{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^2-n-1}$

$12)a_n = 2n-\sqrt[3]{8n^3+n^2+1}$

$13)a_n = \sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{2n+1}$

Tipul 4

$14)a_n = \left(\frac{n^2+2n-2}{n^2-2}\right)^{-\frac{n}{3}}$

$15)a_n = \left(1+\frac{3n+5}{4n^2+8n+4}\right)^n$

$16)a_n = \left(1+\frac{3}{n-7}\right)^{n+5}$

Tipul 5

$17)a_n = \frac{7^{n+2}-5^{n-3}}{7^{n+2}+5^{n-2}}$

$18)a_n = \frac{3^{n-2}+2^{n-1}}{2^{n+1}-3^{n+1}}$

$19)a_n = \frac{2\cdot\alpha^n+\beta^n}{3\cdot\alpha^n+4\cdot\beta^n}$

$20)a_n = \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$

Fila 43 = Limite de siruri

Teorema cleste

A) Teorie:

Teorema cleste: Fie un sir a_n.

Daca $b_n \leq a_n \leq c_n$ si $b_n \to l$ si $c_n \to l$, atunci si sirul $a_n \to l$

Caz particular : **Pentru l=0**, se mai numeste **Criteriul majorarii**, adica :

$b_n \leq a_n \leq c_n$ si $b_n \to 0$ si $c_n \to 0$, atunci si sirul $a_n \to 0$.

B) Exercitii

1) Aratati ca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

2) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots n!}{(2n)!}$

3) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$

4) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

5) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

6) Aratati ca $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n$=0 pentru |a|<1.

7) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n!) \cdot \frac{n}{n^2+1}$

8) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5^n}$

Fila 44 = Siruri

Convergenta sirurilor

A) Teorie:

Fie sirul a_n. Un sir este **convergent** daca este **monoton** si **marginit**.

In caz contrar, este **divergent.**

Pentru a studia convergenta, se studiaza :

a) Monotonia. Se incerca sa se arate ca sirul este crescator, adica $a_{n+1} \geq a_n$ (respective descrescator, adica $a_{n+1} \leq a_n$). Se porneste de la diferenta $a_{n+1} - a_n$ care se compara cu zero, sau eventual de la raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ care se compara cu 1. De avut in vedere ca se poate folosi metoda de a porni de la raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ doar daca $a_n > 0$. Dupa determinarea monotoniei se va trece la determinarea marginirii.

Mentiuni:

- De remarcat ca pentru sirurile crescatoare, **primul termen** a_1**,** care este cunoscut, pentru n=1, **reprezinta totodata si marginea inferioara a sirului**, deoarece

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, adica $a_n \geq a_1$.

- In mod similar, **pentru sirurile descrescatoare, primul termen** a_1, care este cunoscut, pentru n=1, **reprezinta totodata si marginea superioara a sirului**, , deoarece $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, adica $a_n \leq a_1$.

b) Marginirea:

Scopul este determinarea a doua numere α si β astfel incat sa avem $\alpha \leq a_n \leq \beta$ unde α poate fi oricat de mic, iar β poate fi oricat de mare, dar sa fie finite.

Din studiul monotoniei, am aflat deja unul dintre capete ca fiind a_1(pt sir crescator, a_1 reprezinta α, iar daca sirul este descrescator, a_1 reprezinta β).

Ramane sa mai stabilim cel de al doilea capat.

Daca sirul este atat monoton cat si marginit, tragem concluzia ca este convergent, in caz contrar tragem concluzia ca este divergent.

B) Exercitii:

Studiati convergenta urmatoarelor siruri:

$1) a_n = \frac{n+1}{n+2}$

$2) a_n = \frac{n+1}{n}$

$3) a_n = \frac{2^n}{n!} 4) a_n = \frac{3^n}{n!}$

$4) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$

$5) a_n = -\frac{n+1}{n+3}$

$6) a_n = \frac{n!}{n^n}$

Fila 45 = Limite de functii (clasice)

Exercitii
Lectia 1

A) TEORIE: Studiati fisa "Limte de functii"

B) EXERCITII:

Calculati urmatoarele limite de functii, fara a folosi derivate:

Tipul 1 = limite cu $x \to \infty$ (similar cu sirurile)

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$

Tipul 2 = Rezolvare cu tabele: $x \to x_0$ si $x - x_0$ apare la numitor

3) $\lim\limits_{x\to5} \frac{3}{x-5}$

4) $\lim\limits_{x\to3} \frac{4}{7+2^{x-3}}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}$

Tipul 3 = Fractii de polinoame care se simplifica

6) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-x-6}{x^2-4}$

7) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

Tipul 4 = Limite de functii trigonometrice: Idee $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 7x}{\sin 9x}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \frac{tg7x}{tg3x}$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to0} \frac{tg5x}{8x}$

12) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-\cos 7x}{\cos 3x-\cos 2x}$

13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

Fila 46 = Limite de functii (clasice)

Exercitii.
Lectia 2

Calculati urmatoarele limite de functii:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+1}{x^6+3x^2+x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}-x}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+5}\right)^{x^2+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{1}{x-8}$

6) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2}{1+e^{\frac{3}{x-4}}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-\sin 7x}{\sin 3x-\sin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{4x^2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x^2}{1-\cos^3 x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos 3x-\cos 9x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$

12) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x-1}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^{3x}-1}{4x}$

15) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^{2x}-1}{5x}$

Fila 47 = Asimptote

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "**Aplicatii ale limitelor de functii: continuitate, derivabilitatea, asimptote**" si anume partea de **"Asimptote".**

Pe scurt etapele sunt urmatoarele:

Pas1=Se stabileste domeniul de definitie.

Pas2=Se scrie domeniul de definitie ca si reuniune de intervale si se calculeaza valorile functiei (respective limitele functiei daca este interval deschis) in capetele de intervale.

Pas3= Se interpreteaza rezultatele de la Pasul2 (conform teoriei din fisa mentionata anterior) si se determina asimptotele in ordinea urmatoare:

1. asimptote orizontale
2. asimptote oblice
3. asimptote verticale.

B) EXERCITII

Stabiliti asimptotele urmatoarelor functii:

1)$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x^2+6x}$

2)$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-5)}$

3)$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$

4)$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

5)$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$

6)$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

7)$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$

Fila 48 = Continuitate

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Aplicatiile limitelor de functii", partea de "Continuitate"

B) EXERCITII:

1) Studiati continuitatea functiei:

f:R $\to$ R, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}, x \in R\backslash\{-2\} \\ 0, x = -2 \end{cases}$

2) Fie functia

$$f : R \to R, f(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 3ax+3, x \in (1,2] \end{cases}$$

Determinati a real astfel incat f sa fie continua.

3) Studiati continuitatea functiei:

f:R$\to$R, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}, x \neq 0$

4) Discutati in raport cu a$\in$R continuitatea functiei:

f:R$\to$R, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, x \neq 1 \\ a, x = 1 \end{cases}$

5) Studiati continuitatea functiei:

f:R$\to$R, f(x)=$|x^2-1|$

6) Se considera functia

f:R$\to$R, $f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin(x) + \cos(x), x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ tg(x) + 2 \cdot a \cdot ctg(x), x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

Determinati a real, astfel incat functia sa fie continua in x=$\frac{\pi}{4}$.

7) Studiati continuitatea functiei:

f:R$\to$R, f(x)=$\begin{cases} \frac{x^n-a^n}{x-a} \\ m, pentru \quad x = a \end{cases}, pentru \quad x \in R\backslash\{a\}$

Fila 49 = Derivabilitate

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Aplicatiile limitelor de functii", partea de "Derivabilitate"

B) EXERCITII:

1) Studiati derivabilitatea functiei:

f:$(-\frac{1}{2},\infty)\rightarrow$R, f(x)=$\begin{cases} \ln(1+2x), -\frac{1}{2}<x\leq 0 \\ 2x, x>0 \end{cases}$,

2) Studiati derivabilitatea functiei:

f:(0,∞)$\rightarrow$R, f(x)=$\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2}, 0<x\leq 2 \\ \frac{9}{8}x+\frac{7}{4}, x>2 \end{cases}$

3) Studiati derivabilitatea functiei:

f:R$\rightarrow$R, f(x)=ln $\frac{|x+1|+1}{|x-1|}$

Fila 50 = Derivate

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Derivate"

B) EXERCITII:

1) Derivati urmatoarele functii in punctele specificate:

a) f(x)=$\sqrt{5x+1}$ in x=3

b) f(x)=ln(x^2+5x) in x=1

c) f(x)=sin$(2x^2+1)$ in x=2.

2) Derivati urmatoarele functii:

a) $x^7+\ln(x)-5^x$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^5}+7^x\cdot\sin(x)$

c) $f(x)=7x^3+2\cdot 5^x+\cos(x)$

d) $f(x)=x\cdot e^x+7^x\cdot\ln(x)$

e) $f(x)=\sqrt[4]{x^7}\cdot 5^x-\frac{4^x}{\ln(x)}$

f) $f(x)=tg(x)\cdot 7^x-3\cdot x^7+\cos(x)$

g) $f(x)=5^x\cdot x^7-2\sin(x)\cdot tg(x)$

h) $f(x)=\frac{3^x}{\ln(x)}-5\cdot\frac{7^x}{\cos(x)}$

i) $f(x)=\log_3^x\cdot x^8+x^5\cdot\sqrt[3]{x}$

j) $f(x)=\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\cdot 7^x$

Fila 51 = Teorema lui l'Hôpital

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Aplicatiile derivatelor" partea cu "Teorema lui l'Hôpital"

B) EXERCITII:

Calculati limitele urmatoarelor functii, folosind teorema lui l'Hôpital:

1) Nedeterminare $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{3x}$

2) Nedeterminare $[0 \cdot \infty]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \cdot \ln \sqrt{x^2+2x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x \cdot \ln(1-\frac{1}{x})$

3) Nedeterminare $[\infty - \infty]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

4) Nedeterminare tip $[f^g]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\sin x}$

TEMA: Calculati limitele urmatoarelor functii, folosind teorema lui l'Hôpital:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x^5}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x^2}{x^4}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} x^5 \cdot \ln(x)$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{7x^2}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} x^{7x}$

9) $\lim\limits_{x \to 1}$

10) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2+1}$

Fila 52 = Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy

Exercitii

A) TEORIE: Studiati fisa "Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy"

B) EXERCITII

1) Studiati valabilitatea teoremei lui Rolle pentru functia:

$f : [0, 2] \to R, f(x) = |x - 1|$

2) Studiati aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru functia:

$f : [1, 3] \to R, f(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} + 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ 3) Determinati constanta ξ care intervine in teorema lui Cauchy pentru functia:

$f : [-2, 5] \to R, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, -2 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4}, 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

4) Demonstrati urmatoarele inegalitati folosind teorema lui Lagrange:

a) |sin(b)-sin(a)|≤|b-a|

b) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < tg(b) - tg(a) < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ pentru $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$

5) Demonstrati egalitatea:

$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \cdot arctg(x)$

6) Fie $f : [-1, 1] \to R, f(x) = \arcsin(x)$ si $g : [-1, 1] \to R, g(x) = -\arccos(x)$.

Demonstrati ca f si g difera printr-o constanta.

7) Demonstrati inegalitatea:

$\frac{x}{1+x^2} < arctg(x), x \in (0, \infty)$

Studiati fisa "Interpretarea geometrica a derivatei" si efectuati exercitiile de la acea fisa.

Fila 53 = Reprezentarea grafica a functiilor

A) TEORIE:

Etapele pentru reprezentarea grafica a unei functii sunt urmatoarele:

1) Se stabileste domeniul de definitie

2) Se scrie domeniul de definitie ca reuniune de intervale si se **calculeaza valorile** functiei in capetele de intervale (pentru intervale inchise) , respectiv limitele functiei in capetele de intervale (pentru intervale deschise)

3) Se stabilesc asimptotele prin interpretarea rezultatelor anterioare. Se stabilesc prima data asimptotele orizontale, apoi cele oblice si apoi cele verticale.

4) Se fac intersectiile functiei cu axele de coordonate, adica

a) pentru axa Ox se face y=0 si se scoate x.

b) pentru axa Oy se face x=0 si se scoate y.

5) Studiul derivatei intai.

a) Se calculeaza $f^{'}$

b) Se rezolva ecuatia $f^{'} = 0$ si se scot radacinile acestei ecuatii de ex: x1* si x2*.

c) Se face tabel pentru studiul semnului lui $f^{'}$, de exemplu:

x		x1*		x2*	
f'	+ + +	0	- - - -	0	+ + +
f(x)	crescat.	Maxim=(x1*,f(x1*)	descresc.	minim=(x2*.f(x2*)	cresc.

Cu aceasta ocazie se stabilesc punctele de extreme local(**minime si maxime**).

6) Studiul derivatei a doua.
a) Se calculeaza $f^{''}$ b) Se rezolva ecuatia $f^{''} = 0$ si se scot radacinile acestei ecuatii de ex: x1** si x2**. c) Se face tabel pentru studiul semnului lui $f^{''}$, de exemplu:

x		x1**		x2**	
f''	+ + +	0	- - - -	0	+ + +
f(x)	convexa		concava		convexa

Cu aceasta ocazie se stabilesc **punctele de inflexiune**.
7) Se intocmeste tabelul final:
- Pe prima linie se scriu toate valorile **importante** obtinute pt x, exemplu $x_1^*, x_2^*, x_1^{**}, x_2^{**}, x = 0, etc$
- Pe linia doi practic se copiaza tabelul obtinut la analizarea primei derivate.
- Pe linia trei practic se copiaza tabelul obtinut la analizarea derivate a doua.
- Pe ultima linie se scriu valorile functiei (respectiv limitele functiei) aferente valorilor lui x din linia 1

x				x1*		x1**			x2*		x2**	
f’	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+
f’’	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+
f(x)				f(x1*)		f(x1**)			f(x2*)		f(x2**)	

8) Trasare grafic, in ordinea urmatoare:

a) trasare axe Xoy si domeniu de definitie

b) trasare asimptote

c) intersectii cu axele de coordonate

d) folosind tabelul final, se incepe de la stanga spre dreapta si se pune un punct de tipul (x,f(x)) din tabel pe grafic. Se continua cu punctul urmator (x,f(x)) si punctele se unesc conform indicatiilor primei derivate (crescator sau descrescator) si indicatiilor date de a doua derivate (convex sau concav).

Observatii:

1) Uneori nu este necesar studiul derivatei a doua

2) Avansat (optional) : studiul periodicitatii si paritatii

B) EXERCITII:

Reprezentati grafic functiile:

a) $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = x^3 + x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

Fila 54 = Aplicatiile derivatelor

Monotonie. Puncte de extrem
Grafice de functii

Exercitii

1) Studiati monotonia si aflati punctele de extreme pentru functiile:

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

b) $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

2) Reprezentati grafic functiile:

a) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

b) $f(x) = x + \arcsin(x)$

c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$

d) $f(x) = arctg(\ln(x))$

e) $f(x) = x - \sin(x)$

Recapitulare

Fisa 1

1) Calculati urmatoarele limite de siruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3+3\cdot 5+\cdots(2n-1)(2n+1)}{5n^4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n-2}\right)^{n-5}$

2) Calculati urmatoarele limite de functii, fara a utiliza regula lui l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2}{x-7}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8^{x+3}-5^{x-2}}{8^x+4^x}$

3) Calculati urmatoarele limite de functii, utilizand regula lui l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x^4}$

b) $\lim\limits_{n\to 0} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 5x)}$

c) $\lim\limits_{n\to 0} x^3 \cdot \ln(x)$

4) Verificati existenta asimptotelor pentru $f: R \to R$, unde :

a) $f(x) = \frac{5x^2}{x^2+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+x+5}{6x}$

5) Studiati continuitatea functiilor:

a) $f: R \to R,\ f(x) = |x^2-4|$

b) $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}, x \in R\backslash\{-2\} \\ 0, x=-2 \end{cases}$

6) Derivati urmatoarele functii:

a) $f(x) = \frac{x^3\cdot\ln(x)}{7\cdot e^x}$

b) $f(x) = \ln(\sin(4x^2+3))$

c) $f(x) = \sin(tg(7^{2x}+5))$

7) Studiati derivabilitatea functiei:

$$f:(0,\infty)\to R, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2}, 0 < x \leq 2 \\ \frac{9}{8}\cdot x + \frac{7}{4}, x > 2 \end{cases}$$

8) Reprezentati grafic functiile:

a) $f(x) = x^3 + x^2$

b) $f(x) = \frac{5}{x(x-2)}$

Fila 56 = Analiza a XI-a

Recapitulare

Fisa 2

1) Calculati urmatoarele limite de siruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3} - \frac{n}{4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$

2) Studiati convergenta sirurilor:

a) $a_n = \frac{n}{3^n}$

b) $a_n = \frac{5^n}{n!}$

3) Calculati urmatoarele limite de functii, fara a utiliza formula lui l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{6x-2}{x-7}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+6}{x+5}$

4) Calculati urmatoarele limite de functii, utilizand regula lui l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x\cdot 3^x)}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(x)}{\ln(2x+1)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{3x^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} x \cdot e^{-x^2}$

5) Studiati continuitatea urmatoarelor functii $f : R \to R$, pentru:

a) $f(x) = \begin{cases} x+3, x \le 2 \\ x^2+1, x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & , x \neq 3 \\ 5, x = 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2\cdot a\cdot x+1, x \le 1 \\ a\cdot x^2+5a\cdot x, x > 1 \end{cases}$

6) Studiati derivabilitatea functiei:

$$f : R \to R, f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, x \le 1 \\ x^3+2, x > 1 \end{cases}$$

7) Se considera functia $f(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}$.

Demonstrati ca $f^n(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}$

8) Se da functia $f : R \to R, f(x) = \frac{5x^4+2x+1}{x^4}$

a) Determinati asimptotele functiei.

b) Calculati $f^{'}(x)$ si determinati intervalele de monotonie ale functiei.

c) Trasati graficul functiei.

d) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa $x_0 = 1$.

Fila 57 = Analiza a XI-a

Recapitulare

Fisa 3

1) Calculati urmatoarele limite de siruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3}{n!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{3n^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{3n^2+2}} + \cdots \frac{3}{\sqrt{3n^2+n}}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!}$

2) Fie sirul a_n, unde $a_{n+1} = a_n + (-a)^n$.

a) aratati ca sirul nu este monoton.

b) determinati forma nerecursiva a sirului.

3) Determinati parametrul real m, astfel incat functia urmatoare sa aiba limita

in x_0=2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4(x-2)}{5(x-2)}, x \in (0,2) \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{tg3(x-2)}{\sin(x-2)} + m, x \in (2,4) \end{cases}$$

4) Calculati urmatoarele limite de functii folosind regula lui l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(3x-2)}{x^3-x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}$

5) Determinati parametrul real m, astfel incat functiile urmatoare sa fie continue:

a) $f : R \to R, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-8}{x-2}, x \neq 2 \\ m, x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-2x-3}, x \neq 3 \\ m, x = 3 \end{cases}$

6) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x) = x \cdot e^x$ in punctul $x_0 = 0$.

7) Determinati a,b$\in R$ astfel incat $f : R \to R$ sa fie derivabila, unde

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot arctg\frac{x}{2} + a, x \leq 2 \\ a \cdot x + 1, x > 2 \end{cases}$$

8) Se da functia $f : R \to R, f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

a) studiati variatia functiei

b) reprezentati grafic functia

b) scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa x=0

c) discutati solutiile reale ale ecuatiei $f(x) = m, m \in R$.

Fila 58 = Algebra si Analiza a XI-a

Tema

A) ALGEBRA

1) Calculati A^{-1} pentru matricea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
2) Rezolvati ecuatia matriciala:
$$X \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$
3) Calculati determinantul:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$
4) Determinati matricea X din ecuatia:
$$5 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
5) Determinati matricea A astfel incat:

a) $A^2 = I_2$

b) $A^2 = O_2$

B) ANALIZA

6) Calculati limitele urmatoarelor siruri:

a) $a_n = \left(\frac{2n-5}{2n+1}\right)^{n+6}$ b) $a_n = \left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2-7}\right)$

c) $a_n = \frac{\sqrt{2n^2-3n+1}-5n}{7n+2}$ d) $a_n = \frac{9^{n+1}+5^{n-2}}{9^{n+3}-5^n}$

7) Verificati convergenta urmatoarelor siruri:

a) $a_n = \frac{n+3}{n+4}$ b) $a_n = \frac{3^n}{(n+2)!}$

8) Calculati limitele urmatoarelor functii:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{3}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(4x)}{tg(7x)}$

9) Calculati asimptotele urmatoarelor functii:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{3x}$

10) Derivati urmatoarele functii:

a) $f(x) = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{7 \cdot e^x}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} \cdot \sin(x) + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \ln(\sin(x^2+7))$

Fila 59 = Algebra clasa XII

Lectia 1

1) Notiuni preliminare:

Intelegerea notiunilor de:

1. parte stabila
2. asociativitate
3. element neutru
4. element simetric
5. comutativitate.

2) Fie legea de compozitie:

Z x Z -> Z, x * y = x+y-xy

Verificati daca (Z,*) este grup.

3) Fie G intervalul G=(2,∞) .

Pentru orice x,y $\in$G definim * : G x G -> G, $x*$ y = $x \cdot y - 2x - 2y + 6$

Aratati ca (G,*) este grup comutativ.

4) Fie H={0,1,2,3,4} $\subset$**Z** si x * y = |x − y |

Verificati daca (H,*) este grup.

5) Fie $Z_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

a) Intocmiti tablele $\oplus$ si $\otimes$ in Z_5

b) Verificati daca $(Z_5, \oplus)$ este grup comutativ

c) Verificati daca $(Z_5, \otimes)$ este grup comutativ

Exercitii cu clase de resturi
Lectia 2

1) Notiuni preliminare:

- Intocmirea de table de operatii in $\hat{Z}_n$

- Demonstrarea faptului ca $(\hat{Z}_n, +)$ **si** $(\hat{Z}_n, \bullet)$ sunt grupuri.

- Impartirea polinoamelor in $\hat{Z}_n$

2) Rezolvati urmatoarea ecuatie in $\hat{Z}_5$:

$\hat{3} \cdot \hat{x} + \hat{2} = \hat{4}$

3) Rezolvati sistemul urmator in $\hat{Z}_6$:

$$\begin{cases} \hat{3} \cdot x + \hat{5} \cdot y = \hat{1} \\ \hat{5} \cdot x + \hat{4} \cdot y = \hat{0} \end{cases}$$

4) Rezolvati sistemul urmator in $\hat{Z}_5$:

$$\begin{cases} \hat{3} \cdot x + y + \hat{2} \cdot z = \hat{3} \\ x + \hat{2} \cdot y + \hat{3} \cdot z = \hat{1} \\ \hat{2} \cdot x + \hat{3} \cdot y + z = \hat{2} \end{cases}$$

5) Aflati catul si restul impartirii lui f la g, unde:

$f = \hat{3} \cdot x^5 + \hat{4} \cdot x^4 + \hat{3} \cdot x^3 + \hat{3} \cdot x^2 + \hat{2} \cdot x + \hat{2}$

$g = \hat{2} \cdot x^2 + \hat{3} \cdot x + \hat{1}$, in $\hat{Z}_5$. Efectuati apoi proba.

6) Determinati α astfel incat urmatoarea matrice sa fie inversabila:

$A = \begin{bmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{\alpha} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\alpha} & \hat{1} \end{bmatrix}$ in $\hat{Z}_3$

7) Fie f si g in $\hat{Z}_5$Aflati catul si restul impartirii lui f la g, unde:

$f = \hat{3} \cdot x^5 + x^3 + \hat{2} \cdot x + \hat{4}$

$g = \hat{2} \cdot x^3 + \hat{3} \cdot x^2 + \hat{1}$ Efectuati apoi proba **.**

8) Rezolvati urmatorul sistem in Z_{12}:

$$\begin{cases} \hat{3} \cdot x + \hat{2} \cdot y = \hat{4} \\ \hat{2} \cdot x + \hat{3} \cdot y = \hat{1} \end{cases}$$

9) Fie operatiile :

x * y = x+y+3

x ∘ y = xy+3x+3y+6, unde x,y ∈Z.

Verificati daca (Z,*) este grup abelian

Verificati daca (Z,$\circ$) este monoid comutativ.

10) Rezolvati in $\hat{Z}_9$ ecuatia:

$\hat{7} \cdot x + \hat{3} = \hat{2}$

11) Fie Z x Z -> Z, x * y = x+y-1.

Verificati daca (Z,*) este grup abelian.

Fila 61 = Algebra clasa XII

Exercitii cu morfisme, izomorfisme
Lectia 3

Notiuni preliminare: Morfism si izomorfism. Bijectivitate.

1) Aratati ca functia f: (0,∞) -> (-1,1), f(x)=$\frac{x-1}{x+1}, \forall x \in (0, \infty)$ este un izomorfism de la grupul $(R^*, \bullet)$ la grupul $(G, *)$, unde $(G, *)$ se defineste astfel: G=(-1,1), si x * y=$\frac{x+y}{1+xy}$ **Mentiune**: Examen Bacalaureat

2) Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ si G=$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}\subset C$. a) Alcatuiti tabla (G, •) (mentiune=• inseamna inmultire) b) Aratati ca (G, •) este grup abelian c) Aratati ca grupul (G, •) este izomorf cu grupul

3) Fie G=(-1,1) si pentru orice x,y $\in G$ definim: x * y = $\frac{x+y}{1+xy}$

Stiind ca (G,*) este grup, iar functia f:G -> R, definita prin

$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$

Mentiune: Admitere ASE

4) Fie E=R\{0} si $f_i : E- > E, 1 <= i <= 4$

$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x}, \forall x \in E$

a) Aratati ca multimea G=$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ impreuna cu compunerea functiilor formeaza un grup abelian.

b) Aratati ca $(G, \circ)$ este izomorf cu grupul lui Klein.

Indicatie: Vezi grupul lui Klein, manual algebra XII, pag. 43

5) Rezolvati in $\hat{Z}_5$ sistemul:

$$\begin{cases} \hat{4}\cdot x + \hat{3}\cdot y = \hat{2} \\ \hat{3}\cdot x + \hat{2}\cdot y = \hat{2} \end{cases}$$

Mentiune: Examen Bacalaureat

INEL

Lectia 4

Notiune de GRUP

Fie *:AxA->A, de exemplu x * y = x+y-xy

Se studiaza pentru (A,*) daca avem indeplinite:

1) Parte stabila: Daca pentru $\forall x, y \in A \rightarrow x * y \in A$

2) Asociativitate: Daca pentru $\forall x, y, z \in A$, x*(y*z)=(x*y)*z

3) Element neutru: Daca pentru $\forall x \in A, \exists e \in A$, astfel incat

x* e=e*x=x

4) Element simetric: Daca pentru $\forall x \in A, \exists x^{'} \in A$,astfel incat

$x * x^{'} = x^{'} * x = e$

5) Comutativitate: Daca pentru $\forall x, y \in A$, x*y=y*x

Pentru 1,2,3,4 adevarate, inseamna ca (A,*) este grup.

Daca in plus este adevarat si 5, avem grup comutativ, sau grup abelian.

Notiunea de MONOID

Fie A o multime nevida si *:AxA->A, de exemplu x * y = x+y-xy

(A,*) este MONOID daca avem:

(A,*)=asociativ si

(A,*)= element neutru

INEL

Fie

- A=multime nevida si - 2 legi de compozitie, de exemplu notate cu * si

$\bullet$

Avem (A,$*,\bullet$) = INEL, daca sunt indeplinite urmatoarele 3 conditii:

- 1) (A,*)= grup abelian(comutativ) adica:

- Parte stabile pentru (A,*)
- Asociativitate pentru (A,*)
- Element neutru pentru (A,*)
- Element simetric pentru (A,*)
- Comutativitate pentru (A,*)

2) (A,$\bullet$)=**monoid** adica:

- Asociativitate pentru (A,$\bullet$)
- Element neutru pentru (A,$\bullet$)

3) Daca operatia $\bullet$ (deci a doua operatie, cea cu monoidul) , **este distributiva** fata de * (deci fata de prima operatie, cea cu grupul abelian), **atat la stanga cat si la dreapta**, adica daca sunt indeplinite urmatoarele doua egalitati:

a) $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ (distribuitate la stanga a lui $\bullet$ fata de *)

b) $(y * z) \bullet x = y \bullet x * z \bullet x$ (distribuitate la dreapta a lui $\bullet$ fata de *)

Fila 63 = Algebra clasa XII

Probleme recapitulative

Lectia 5

1) Fie A={0,1,2,3,4,5} si x*y=|x-y|. Verificati daca (A,*) este grup.

2) Fie $\hat{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ si operatia de adunare. Verificati daca $(\hat{Z}_4, +)$ este grup.

3) Fie multimea A=R\{1} si legea de compozitie *: A x A -> A, unde

x * y $=\frac{1}{2}(1+x+y-xy)$

Aratati ca (A,*) este asociativa si aflati elementul neutru.
4) Fie multimea A={a,b,c} si operatia * definita prin tabla:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Aratati ca grupul (A,*) este izomorf cu $(\hat{Z}_3, +)$.
5) Fie G=(-1,1) si legea de compozitie *:G x G -> G, unde x * y $=\frac{x+y}{1+xy}$
Stiind ca (G,*) este grup, se da functia f: G -> R, f(x)=ln $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
Aratati ca (G,*) si (R,+) sunt izomorfe.

6) Rezolvati in $\hat{Z}_5$ sistemul:
$$\begin{cases} \hat{2}\cdot x+\hat{3}\cdot y=\hat{2} \\ \hat{3}\cdot x+\hat{y}=\hat{1} \end{cases}$$
7) Demonstrati ca multimea matricilor patratice (de exemplu de ordinul 3), formeaza un inel in raport cu adunarea si inmultirea matricilor.

Fila 64 = Analiza clasa XII

Formule esentiale
Lectia 1

Tabel integrale nedefinite

$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

$\int \frac{1}{x+a} \cdot dx = \ln|x+a| + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + C$

$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + C$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot dx = tg(x) + C$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \cdot dx = -ctg(x) + C$

$\int tg(x) = -\ln|\cos(x)| + C$

$\int ctg(x) \cdot dx = \ln|\sin(x)| + C$

Integrale-> Metode de calcul :

- **Metoda substitutiei= implica retete de rezolvare**
- **Metoda integrarii prin parti :** $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

Integrale definite

a) Formula lui Leibnitz-Newton :

$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

b) Formula de integrare prin parti pt integrale definite :

$\int_a^b f \cdot g^{'} \cdot dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f^{'} \cdot g \cdot dx$

c) Operatii cu integrale :

$\int_a^b (f \pm g) \cdot dx = \int_a^b f \cdot dx \pm \int_a^b g \cdot dx$

$\int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$, pentru $\forall k \in R$.

d) Subtilitati :

- Sume Rieman

- Sume Darboux

- Functii integrabile

4) Aplicatiile integralelor in geometrie :

Fie axa Ox, dreptele verticale x=a si x=b si graficul functiei f(x)

- Suprafata S=$\int_a^b |f(x)| \cdot dx$

- Volumul V= $\pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$

- Lungime curba l=$\int_a^b \sqrt{1 + f(x)^2} \cdot dx$

- Arie laterala=$2 \cdot \pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + (f')^2} \cdot dx$

- Fie centrul de greutate G(x_G, y_G) al suprafetei marginite de x=a. x=b, Ox si f(x), unde $x_G = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$ si $y_G = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$

Fila 65 = Analiza clasa XII

Metoda substitutiei
Lectia 2

A) Privire generala despre integrale:

Esenta integralelor:

a) Tabelul de integrale (de copiat si invatat)

b) Integrale nedefinite :

Calculati $\int \left(e^x + x^3 + \frac{1}{x}\right) \cdot dx$

c) Integrale definite :

Calculati $\int \left(e^x + x^5 + 7x^2\right) \cdot dx$

d) Aplicatiile integralelor in geometrie :

Calculati suprafata marginita de x=4, x=6, axa Ox si functia f(x)=x^2+$3x$+ln(x)

B) Metoda substitutiei

Calculati :

a)$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \cdot dx$

b)$\int \frac{e^x}{e^x+1} \cdot dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} dx$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$

Exercitii :

1) $\int \left(\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} + 1\right) \cdot dx$

2) $\int \frac{3 \cdot e^x}{2 \cdot e^x - 1} dx$

3) $\int \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{7-x^2}} \cdot dx$

4) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^{10}}} dx$

5) $\int \frac{2^x \cdot dx}{\sqrt{1-4^x}}$

6) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

7) $\int x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot dx$

8) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx$

Fila 66 = Analiza clasa XII

Exercitii cu integrale de tipul

$$\int \frac{1}{gradI}, \int \frac{1}{grad2}, \int \frac{gradI}{grad2}$$

Lectia 3

1) Calculati :

a) $\int \frac{5}{3x+2}dx$ d) $\int \frac{-3}{-3+2x}dx$

b) $\int \frac{4}{1-3x}dx$ e) $\int \frac{6}{5-7x}dx$

c) $\int \frac{6}{-3x+2}dx$ f) $\int \frac{-1}{-x-4}dx$

2) Calculati :

a) $\int \frac{6}{x^2-6x}dx$ d) $\int \frac{1}{-x^2+10x-25}dx$

b) $\int \frac{-1}{x^2+25}dx$ e) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+8x+16}dx$

3) Calculati :

a) $\int \frac{1}{x^2+3x+11}dx$ d) $\int \frac{1}{4x^2+x+5}dx$

b) $\int \frac{1}{-x^2+3x-7}dx$ e) $\int \frac{1}{-2x^2+x-7}dx$

c) $\int \frac{1}{3x^2+2x+5}dx$ f) $\int \frac{1}{3x^2+x+7}dx$

4) Calculati :

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-7x}dx$

b) $\int \frac{-3x+2}{x^2-64}dx$

c) $\int \frac{-x}{x^2-2x+1}dx$

Metoda integrarii prin parti
Exercitii
Lectia 4

Calculati:

1) $\int x \cdot e^x \cdot dx$

2) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$

3) $\int \left(1 - e^x \cdot x^2 - 2x^3 \cdot e^x\right) dx$

4) $\int x \cdot \sin(x) \cdot dx$

5) $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx$

6) $\int x \cdot \ln(x) \cdot dx$

7) $\int x^2 \cdot \ln(x) \cdot dx$

8) $\int e^x \cdot \sin(x) \cdot dx$

9) $\int e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot dx$

10) $\int \cos^2(x) \cdot dx$

Indicatie: Se scrie $\int \cos^2(x) \cdot dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x) \cdot dx$

11) $\int \sin^2(x) \cdot dx$

12) $\int \left(\sin^3(x) + 2 \cdot \cos^3(x)\right) \cdot dx$

Fila 68 = Analiza clasa XII

Integrarea functiilor rationale
Exercitii
Lectia 5

Notiuni preliminare

Fie P(x) si Q(x) doua polinoame.

$\int \frac{P}{Q}dx$ **abordeaza in functie de gradele lui P si Q, astfel :**

Caz 1:Pentru grad(P) >= grad (Q)

Se face impartirea polinomului P la Q si se obtine catut C si restul R, restul R avand grad mai mic decat Q. Prin urmare

$P = C \cdot Q + R$ respectiv impartind cu Q se obtine :

$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$. Integrand relatia se obtine :

$\int \frac{P}{Q} = \int C + \int \frac{R}{Q}$

Calculul integralei $\int C$ este intotdeauna foarte simplu, problema fiind calculul integralei $\int \frac{R}{Q}$, o integrala a unei fractii de doua polinoame, gradul numaratorului fiind mai mic decat gradul numitorului, adica se ajunge la Caz 2.

Caz 2:Pentru grad(P) < grad (Q)

Se scrie $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-a)^{\alpha 1} \cdot (x-b)^{\alpha l2} ......(mx^2+nx+p)^{\beta 1}.....}$ si se descumpune folosind **metoda coeficientilor nedeterminati**. Dupa descompunere, se integreaza expresia anterioara. Pentru modele de rezolvare complete, vezi exercitiile urmatoare.

Exercitii integrale rationale Calculati:

1) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$
2) $\int \frac{x^4}{x^3-1}dx$
3) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2 \cdot (x+4)^2}dx$
4) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$ (= Dificila: Model Lia Arama pag 306)

Integrarea functiilor trigonometrice
Lectia 6

Metode de rezolvare.

Idee: Dupa substitutiile urmatoare, intotdeauna se obtine o expresie rationala in t.

Fie o functie rationala in sin(x) si/sau cos(x), notata cu R(sin(x),cos(x))

Cazul 1 Daca R(- sin(x), cos(x)) = - R(sin(x) , cos(x))
(adica impar in sinus)

atunci se face substitutia cos(x)=t

Cazul 2 Daca R(sin(x), - cos(x)) = - R(sin(x) , cos(x))
(adica impar in cosinus)

atunci se face substitutia sin(x)=t

Cazul 3 Daca R(- sin(x), - cos(x)) = R(sin(x) , cos(x))
(adica par in sin si cos)

atunci se face substitutia tg(x)=t

Cazul 4 Daca NU se reuseste cu cazurile 1,2,3,

atunci se face substitutia $tg\frac{x}{2} = t$

De remarcat ca substitutia de la caz 4 este functionala in **orice situatie**, avantajul substitutiilor 1,2,3 fiind ca de obicei genereaza calcule mai simple.

Din $tg\frac{x}{2} = t$ se obtine $\frac{x}{2} = arctg(t)$ -> $x = 2 \cdot arctg(t)$ -> $dx = \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$

Se exprima toate functiile trigonometrice in functie de $tg\frac{x}{2} = t$ conform formulelor :

$\sin(x) = \frac{2 \cdot t}{1+t^2}$ cos(x)=$\frac{1-t^2}{1+t^2}$ tg(x)=$\frac{2 \cdot t}{1-t^2}$ ctg(x)=$\frac{1-t^2}{2 \cdot t}$

Recomandari:

Pentru cazul 1, formule utile:

a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) Pentru cos(x)=t, avem (cos(x))'= - sin(x) -> dt = $-\sin(x) \cdot dx$

Pentru cazul 2, formule utile:

a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) Pentru sin(x)=t, avem (sin(x))'= cos(x) -> dt = $\cos(x) \cdot dx$

3) **Pentru cazul 3**, formule utile:

a) $\cos^2(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)}, adica = \frac{1}{1+t^2}$

b) $\sin^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1+tg^2(x)}, adica = \frac{t^2}{1+t^2}$

B) Exercitii

1) $\int \sin^3(x) \cdot dx$

2) $\int \sin^5(x) \cdot dx$

3) $\int \cos^3(x) \cdot dx$

4) $\int \sin^4(x) \cdot \cos^2(x) \cdot dx$

5) $\int tg^4(x) \cdot dx$

6) $\int \frac{dx}{5+4\cdot\sin(x)}$

7) $\int \frac{dx}{2\cdot\sin(x)-\cos(x)+5}$

8) $\int \frac{dx}{1+tg(x)}$

9) $\int \frac{1}{3+\cos(x)} dx$

10) $\int \frac{1}{1+\sin^2(x)} dx$

11) $\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} dx$

12) $\int \frac{2\cdot tg(x)+3}{\sin^2(x)+2\cdot\cos^2(x)} dx$

13) $\int \frac{1}{\cos^4(x)\cdot\sin^2(x)} dx$

14) $\int \frac{1}{\cos^2(x)+2\cdot\sin^2(x)} dx$

15) $\int \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)\cdot(1+\cos(x))} dx$

Substitutiile lui Euler
Lectia 7

Metoda de integrare folosind substitutiile lui Euler

Fie integrala dintr-o expresie rationala, notata cu R, care contine expresii ale lui x si radical din functia de gradul doi, adica fie :

$$\int R(x, \sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c})\cdot dx$$

Substitutia efectuata este in functie de urmatoarele cazuri :

Pentru $\Delta < 0$ si a $>$ 0

Se face substitutia:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$$

- Se ridica la patrat si se scoate x in functie de t
- Se calculeaza dx in functie de t
- Se calculeaza $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$ in functie de t, inlocuind pe x
- Se exprima $\int R(x, \sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c})\cdot dx$ in functie de t, fiind garantat ca intotdeauna se obtine o expresie rationala (fara radicali) in t, care se rezolva conform metodei de la integrarea functiilor rationale.

Pentru $\Delta < 0$ si c $>$ 0

Se face substitutia:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot x + \sqrt{c}$$

- Se ridica la patrat si se scoate x in functie de t
- Se calculeaza dx in functie de t
- Se calculeaza $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot x + \sqrt{c}$ in functie de t, inlocuind pe x
- Se exprima $\int R(x, \sqrt{a\cdot x^2+b\cdot x+c})\cdot dx$ in functie de t, fiind garantat ca intotdeauna se obtine o expresie rationala (fara radicali) in t, care se rezolva conform metodei de la integrarea functiilor rationale.

Pentru $\Delta > 0$

Daca $\Delta > 0$ inseamna ca exista doua radacini reale, fie $x_1 = \alpha$ si $x_2 = \beta$

Se face substitutia:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot(x-\alpha)$$

(sau in mod similar, notand $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\cdot(x-\beta)$)

- Se scrie $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha)$ unde $(x-\alpha) = \sqrt{(x-\alpha)^2}$, deci se obtine $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t\cdot\sqrt{(x-\alpha)^2}$
- Se imparte cu $\sqrt{x-\alpha}$ si se obtine

$$\sqrt{a(x-\beta)} = t \cdot \sqrt{(x-\alpha)}$$

- Se ridica la patrat si se scoate x in functie de t
- Se calculeaza dx in functie de t
- Se calculeaza $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \cdot (x-\alpha)$ in functie de t, inlocuind pe x
- Se exprima $\int R(x, \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}) \cdot dx$ in functie de t, fiind garantat ca intotdeauna se obtine o expresie rationala (fara radicali) in t, care se rezolva conform metodei de la integrarea functiilor rationale

Pentru $\Delta = 0$

Daca $\Delta = 0$ inseamna ca exista doua radacini egale, fie $x_1 = x_2 = \alpha$

Se face substitutia:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \cdot (x-\alpha)$$

- Se scrie $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\alpha)} = t(x-\alpha)$ unde $(x-\alpha) = \sqrt{(x-\alpha)^2}$,

se obtine $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\alpha)} = t \cdot \sqrt{(x-\alpha)^2}$

Se imparte cu $\sqrt{x-\alpha}$ si asa mai departe, similar cu cazul $\Delta > 0$

B) Exercitii

1) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}} dx$2) $\int \frac{dx}{(x^2+36)\sqrt{36-x^2}}$3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

Fila 71 = Analiza clasa XII

Substitutiile lui Cebîşev
Lectia 8

Fie $\int x^m \cdot (a \cdot x^n + b)^p \cdot dx$

unde a $\neq 0$, $a \cdot x^n + b > 0$, m,n,p=rationale

Integrala se poate reduce la calcul unei integrale rationale, **doar in urmatoarele** trei cazuri (stabilite de **Cebîşev**) :

1) Pentru p= intreg

Se va face substitutia $\sqrt[r]{x} = z$, unde z este multiplu comun al numitorilor lui m si n

2) Pentru $\frac{m+1}{n}$ =intreg

Se va face substitutia $a \cdot x^n + b = z^N$, unde N= numitorul lui p

3) Pentru $\frac{m+1}{n} + p$ =intreg

Se va face substitutia $a + b \cdot x^{-N} = z^N$, unde N= numitorul lui p

Exercitii:

1) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}$
2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Fila 72 = Analiza clasa XII

Exercitii tip = integrale
Lectia 9

Calculati integralele:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
2) $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$
3) $\int (x-1)\cdot\sqrt{\frac{x}{x+1}}\cdot dx$
4) $\int \sin^2(x)\cdot\cos^4(x)\cdot dx$
5) $\int \cos^5(x)\cdot dx$
6) $\int \cos^4(x)\cdot dx$
7) $\int tg^5(x)\cdot dx$
8) $\int \frac{1}{\sin^3(x)}dx$
9) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx$
10) $\int \sin(5x)\cdot\cos(7x)\cdot dx$

Fila 73 = Analiza clasa XII

Recapitulare 1 = integrale
Lectia 10

1) Calculati urmatoarele integrale:

a) $\int \left(7^x + \sqrt[3]{x} - \cos(x)\right) \cdot dx$

b) $\int \left(e^x - 6x + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right) \cdot dx$

2) Calculati urmatoarele integrale:

a) $\int \frac{7}{x \cdot \sqrt{\ln(x)}} \cdot dx$ b) $\int \frac{5 \cdot e^x}{1-e^x} dx$ c) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$

3) Calculati integralele:

a) $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx$ b) $\int x \cdot \ln(x) \cdot dx$

4) Calculati:

a) $\int_1^3 x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot dx$ b) $\int_2^{10} \frac{5+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5) Calculati:

a) $\int_1^2 \frac{4}{6-3x} dx$ b) $\int_1^2 \frac{1}{2x^2+3x+10} dx$ c) $\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$

6) Calculati:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} dx$ b) $\int \frac{5x^4}{x^3-1} dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\sin(x)} dx$ d) $\int 5 \cdot \sin^3(x) \cdot dx$

7) Calculati:

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} dx$ b) $\int \frac{dx}{(x^2+9) \cdot \sqrt{9-x^2}} dx$

8) Calculati suprafata marginita de x=1, x=3, Ox si f(x) definita astfel:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Fila 74 = Analiza clasa XII

Recapitulare 2 = integrale

Lectia 11

Calculati urmatoarele integrale:

1) $\int \frac{2}{3x \cdot \sqrt[3]{\ln(x)}} dx$
2) $\int \frac{2-x}{\sqrt{1+3x}} dx$
3) $\int \frac{4 \cdot e^x}{5 \cdot e^x - 1} dx$
4) $\int \frac{1}{x^2-14x+49} dx$
5) $\int \frac{2x-1}{2x^2+x-7} \cdot dx$
6) $\int \frac{1}{x^2-5x} dx$
7) $\int e^x \cdot \cos(x) \cdot dx$
8) $\int x \cdot \ln(x) dx$
9) $\int x \cdot \cos(x) dx$
10) $\int \frac{x^6}{\sqrt{4-x^{14}}} dx$

Ecuatii diferentiale
Lectia 12

Ecuatii diferentiale cu variabile separabile:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Se procedeaza astfel:

Se scrie $dy(x) = y' \cdot dx$ -> $y' = \frac{dy}{dx}$ -> $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ ->
$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$ Integram ambii membrii si obtinem:
$\int \frac{1}{g(y)} \cdot dy = \int f(x) \cdot dx$ -> se rezolva si se scoate y

Exemplu:

Rezolvati ecuatia diferentiala y'=$2x(1 + y^2)$
Rezolvare: $\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)$ -> $\frac{dy}{1+y^2} = 2x \cdot dx$ -> Integram ambii membrii si obtinem $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x \cdot dx$ adica obtinem arctg(y)=$x^2 + C$ Se aplica tg la ambii membrii si se obtine y=$tg(x^2 + C)$

Ecuatii diferentiale de gradul II

Exemplu: Rezolvati ecuatia diferentiala:
y"+9y=0 cu conditiile $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ si $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$
Rezolvare: Se respecta urmatorii pasi:
1) Se noteaza $y = e^{r \cdot x}$
2) Se scrie $\begin{cases} y' = r \cdot e^{r \cdot x} \\ y'' = r^2 \cdot e^{r \cdot x} \end{cases}$
3) si se inlocuieste in ecuatia initiala:

$$r^2 \cdot e^{r \cdot x} + 9 \cdot e^{r \cdot x} = 0$$

4) Se imparte cu $e^{r \cdot x}$ si se obtine $r^2 + 9 = 0$

5) Se rezolva ecuatia si se obtine $r_1 = 3 \cdot i$ si $r_2 = -3 \cdot i$

6) Se scrie expresia lui y conform teoriei urmatoare:

Teorie (C1 si C2 sunt constante)

a) Pentru $\Delta > 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{r1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r2 \cdot x}$, unde r1 si r2 sunt reali

b) Pentru $\Delta = 0 \Rightarrow y = (C_1 + C_2) \cdot e^{r1 \cdot x}$, unde r1=r2 = real

c) Pentru $\Delta < 0 \Rightarrow y = (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\beta \cdot x)) \cdot e^{\alpha \cdot x}$ pt $r = \alpha \pm i \cdot \beta$

In cazul nostru $\alpha = 0$ si $\beta = 3$ deci $y = (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \cos 3x) \cdot e^{0 \cdot x}$ adica

$$y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \cos 3x$$

7) Se determina C_1 si C_2 din conditiile initiale, rezolvand sistemul de doua ecuatii (aferent celor doua conditii initiale) si doua necunoscute (C1 si C2)

8) Se scrie forma finala a lui y in functie de C1 si C2 determinate anterior.

Exercitii : Rezolvati urmatoarele ecuatii diferentiale:

1) y”-6y’+9y=0 pentru f(0)=1 si f’(0)=2

2) y”-10y’+25y=0 pentru f(0)=1 si f’(0)=2

3) y”-5y’ +6y=0 pentru f(1)=2 si f’(1)=1

4) y’=$2x^3$ pentru y(1)=4

5) y’=(2x+1)y

6) y’=$x(1+y^2)$

Fila 76 = Test 1

Algebra IX, X, XI

1) Determinati multimile:

A=$\left\{x \in N | x = \frac{4n}{n+2}, n \in N\right\}$

B=$\left\{x \in Z | x = \frac{6n+7}{3n+1}, n \in Z\right\}$

2) Fie familia functiilor de gradul II $f_m(x) = m \cdot x^2 + 2(m+1)x + m + 2$, m$\in R\backslash\{0\}$. Aratati ca varfurile parabolelor acestor functii se gasesc pe dreapta y=x+1.

3) Gasiti numerele complexe ale caror patrate sa fie :

a) i

b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

4) In dezvoltarea $\left(a \cdot \sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficientilor binomiali de grad par este 128. Aflati termenul care il contine pe a^3.

5) Rezolvati inecuatia:

$$\log_{2^x}(x) + \log_2(x) > 0$$

6) Determinati A si B, astfel incat polinomul $A \cdot X^{n+2} + B \cdot X^n + 2$ sa fie divizibil cu $(x-1)^2$.

7) Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculati A^n pentru n>=1.

8) Calculati determinantul

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt radacinile ecuatiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$

9) Discutati natura sistemului:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = n \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

dupa valorile parametrilor reali m si n.

Fila 77 = Test 2

Algebra IX-XII
ANALIZA XI-XII

1) Determinati termenii care il contin pe b^2 din dezvoltarea $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^n$, stiind ca n este cel mai mare numar natural care verifica inecuatia:

$$\log_{\frac{1}{3}}(n)+\log_{\frac{n}{3}}(n)>0$$

2) Discutati si rezolvati sistemul:

$$\begin{cases} x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ mx+m^2y-z=m^2 \end{cases}$$

3) Fie $(\hat{Z}_5,+)$. Alcatuiti tabla $(\hat{Z}_5,+)$ si verificati daca $(\hat{Z}_5,+)$ este grup abelian.

4) Calculati limita sirului:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$$

5) Calculati integrala:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$$

Fila 78 = Test 3

Matematica IX-XII

1) Rezolvati ecuatia:

$8 \cdot A_{x+1}^{5} = 3 \cdot P_3 \cdot A_x^5$

2) Aratati ca polinomul $(x+1)^{6n+1} + x^{6n+2}$ se divide la $x^2 + x + 1$.

3) Scrieti urmatoarele numere complexe sub forma trigonometrica :

a) z=$\sin(\alpha) - i \cdot \cos(\alpha)$

b) z=$\cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)$

4) Reprezentati grafic functia:

f(x)=x-sin(x)

5) Calculati limita:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(5 + x \cdot 3^x)}{7 \cdot x}$$

6) Studiati derivabilitatea functiei:

$$f : R \to R, f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, x <= 1 \\ x^3 + 2, x > 1 \end{cases}$$

7) Determinati rangul matricii

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & n \\ n & n+1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, unde n=parametru real.

8) Rezolvati sistemul omogen

$$\begin{cases} m \cdot x + 4 \cdot y = 0 \\ x + m \cdot y = 0 \end{cases}$$

9) Fie hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Scrieti ecuatia tangentei la hiperbola in punctul M(a,b).

10) Stabiliti asimptotele functiei:

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$$

11) Verificati daca $(\hat{Z}_5, \circ)$ este grup comutativ, (cu $\circ$ este notata inmultirea).

12) Rezolvati in $\hat{Z}_5$ sistemul:

$$\begin{cases} \hat{4} \cdot x + \hat{3} \cdot y = \hat{2} \\ \hat{3} \cdot x + \hat{2} \cdot y = \hat{2} \end{cases}$$

13) Calculati:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Fila 79 = Test 4

Examen admitere facultate

1) Rezolvati ecuatia:

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \frac{4x-3}{3}$$

2) Determinati a astfel incat polinomul

$P(x) = \hat{2} \cdot x^3 + (a + \hat{2}) \cdot x + 1 \qquad \in \hat{Z}_3[X]$ sa fie ireductibil.

3) Demostrati ca pentru orice n>=2 avem:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

4) Demonstrati identitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$$

Indicatie: Se va folosi formula din manualul de clasa a X-a de la combinari:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Fila 80 = Test 5

Recapitulare teorie

1) Scrieti toate formulele cunoscute de la trigonometrie si formulele de calcul ale suprafetei triunghiului.

2) Scrieti toate formulele cunoscute de la geometrie analitica :

a) puncte

b) dreapta

c) cercul

d) elipsa

e) hiperbola

f) parabola

Efectuati pentru fiecare situatie desenul figurii si scrieti definitia.

3) Scrieti metodele prin care se poate demonstra ca o functie este bijectiva.

4) Dati cate un exemplu simplu si mentionati ideea de rezolvare pentru toate tipurile de ecuatii cunoscute. (ecuatii bipatrate, reciproce, etc)

5) Scrieti etapele prin care se verifica faptul ca o functie este:

a) continua

b) derivabila

6) Enuntati teoremele:

a) Rolle

b) Lagrange

c) Cauchy

7) Enuntati teorema lui l'Hôpital.

8) Scrieti etapele necesare pentru stabilirea asimptotelor.

9) Scrieti etapele necesare trasarii graficului unei functii.

10) Specificati etapele rezolvarii unei probleme folosind sirul lui Rolle.

11) Explicati metodele de rezolvare a integralelor nedefinite :

a) metoda substitutiei si metoda integrarii prin parti

b) integrarea functiilor rationale

c) integrarea functiilor irationale(substitutiile lui Euler)

d) integrarea functiilor trigonometrice

12) Explicati:

a) sume Rieman

b) sume Darboux

c) formula lui Leibnitz-Newton

13) Scrieti formulele de calculul cu integrale pentru:

a) Suprafata

b) Volumul de rotatie

c) Lungimea unei curbe

d) Centrul de greutate al unei placi

14) Scrieti etapele necesare aflarii inversei unei matrici

15) Scrieti etapele necesare determinarii rangului unei matrici.

16) Scrieti etapele necesare studiului compatibilitatii unui sistem de ecuatii liniare.

17) Scrieti etapele necesare verificarii faptului ca (A,*) este grup :

a) Exemplificare pentru A=interval

b) Exemplificare pentru A=multime.

18) Scrieti etapele necesare verificarii izomorfismului de la (A,$\oplus$) la $(B, \otimes)$ prin functia f(x).

19) Scrieti etapele necesare verificarii faptului ca $(A, \oplus, \otimes)$ este inel.

Bibliografie

1) Manual algebră clasa a IX-a

2) Manual de geometrie plană şi trigonometrie clasa a IX-a

3) Manual de algebră clasa a X-a

4) Manual de geometrie în spatiu şi trigonometrie clasa a X-a

5) Manual de algebră clasa a XI-a

6) Manual de analiză matematică clasa a XI-a

7) Manual de geometrie analitică clasa a XI-a

8) Manual de algebră clasa a XII-a

9) Manual de analiză matematică clasa a XII-a

10) Culegere de probleme de algebră de Chiriac

11) Culegere de probleme de algebră de Năstăsescu

12) Culegere de probleme de analiză matematică de Lia Arama

13) Culegere de probleme de trigonometrie de Turtoiu

14) Formule matematice uzuale de Rogai

15) Subiecte pentru examenul de bacalaureat

16) Subiecte pentru examenul de admitere în facultate